Вариант -1

С 1. Дано уравнение $\sqrt{3}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=\sin 2x$

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi;\pi/2]$.

С 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=3$, $BC=4$, $AA_1=12$. Через середину ребра AB перпендикулярно диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите угол, образованный этой плоскостью с основанием параллелепипеда.

С 3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}\ge 2\sqrt[4]{3}, \\ \log_2^2 x+6\ge 5\log_2 x. \end{cases}$

С 4. Около прямоугольного треугольника ABC ($\angle B=90^\circ$) описана окружность. На продолжении стороны BC взята такая точка D, что $CD=6$. Отрезок AD, пересекает окружность в точке K так, что АК:КD=2:1. Найти радиус окружности, если известно, что BC=2.

С 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых графики функций $f(x)=\left|x^2-2x-8\right|$ и $g(x)=a(x+5)+2$ не имеют общих точек.

С6. Рассматриваются пятизначные натуральные числа, в записи которых все пять цифр различны.

А) Среди таких чисел найдите наименьшее, которое делится на 3.

Б) Среди таких чисел найдите наибольшее, которое делится на 3.

В) Среди таких чисел найдите наименьшее, которое делится на 9.

Г) Среди таких чисел найдите наибольшее, которое делится на 9.

Вариант -2

С1. Дано уравнение $4\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \sin x + \sin 2x$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

С2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник АВС, в котором АВ=АС=10, ВС=16. Высота призмы равна 3. Точка М – середина ребра A_1B_1. Найдите тангенс угла между прямой МВ и плоскостью BCC_1.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^x - 2\cdot 6^x - 3^{2x+1} \ge 0, \\ \log_3(-x) - \log_3^2(-x) \ge 0. \end{cases}$

С4. В треугольнике АВС на прямой ВС выбрана точка К так, что ВК:КС=1:2. Точка Е – середина стороны АВ. Прямая СЕ пересекает отрезок АК в точке Р. Найдите площадь треугольника АЕР, если площадь треугольника АВС равна 120.

С5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых графики функций $f(x) = 2 + |x + \sqrt{x^2 - 8x + 16}|$ и $g(x) = ax + 4a$ имеют максимально возможное количество общих точек.

С6. а) Представьте число 205 в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел.

б) Найдите все возможные способы представления числа 205 указанным образом.

в) Можно ли число 205 представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных нечетных натуральных чисел?

Вариант - 3

С 1. Дано уравнение $3\sin^2 x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

С 2. Сторона основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равна 12, а высота равна 9. Найдите расстояние от точки А до плоскости (A_1FD).

С 3. Решите систему неравенств $\begin{cases} |3^x - 6| \geq 3, \\ \log_2 x - 3\sqrt{\log_2 x} + 2 \geq 0. \end{cases}$

С 4. На стороне АВ треугольника АВС, как на диаметре построена полуокружность ω, которая пересекает прямые АС и ВС в точках B_1 и A_1 соответственно. Найдите радиус полуокружности ω, если известно, что $A_1C=8$, $B_1C=7$, а площадь треугольника A_1B_1C равна $14\sqrt{3}$.

С 5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых графики функций $f(x) = 2 + x\sqrt{x^2 - 8x + 16}$ и $g(x) = ax + 4a$ имеют не менее двух общих точек.

С 6. На листе бумаги в строчку записаны 14 единиц.

а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

б) Докажите, что если единицы, стоящие на четных местах, заменить на четверки, все равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

в) Докажите, что между любыми 14 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

Вариант - 4

С1. Дано уравнение $6tg^2x-\frac{13}{\cos x}+12=0$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.

С2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором CB=CA=5, BA=6. Высота призмы равна 24. Точка M – середина ребра AA_1, точка K – середина ребра BB_1. Найдите угол между плоскостью MKC_1 и плоскостью основания призмы.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases}25^x-5\cdot 10^x+4^{x+1}<0,\\ \log_2 x-\log_2^2 x\ge 0.\end{cases}$

С4. Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

С5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых графики функций $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ -5*a* и $g(x)=ax+3$ не имеют общих точек.

С6. а) Найдите три несократимые дроби, произведение любых двух из которых – целое число.

б) Найдите четыре несократимые дроби, произведение любых двух из которых – целое число.

в) Существует ли 2012 несократимых дробей, произведение любых двух из которых – целое число?

Вариант - 5

С1. Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)-\cos x=0$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

С2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=AA_1=4$, $AD=3$. Найдите тангенс угла, который образует плоскость ACB_1 с гранью CDD_1C_1.

С3. Решите неравенство $\frac{\log_{2x-1} x}{\log_{2x-1}(9x^2-12x+5)} \le 0$.

С4. В треугольнике АВС на стороне АВ расположена точка К так, что АК:КВ=3:5. На прямой АС взята точка Е так, что АЕ=2СЕ. Известно, что прямые ВЕ и СК пересекаются в точке О. Найдите площадь треугольника АВС, если площадь треугольника ВОС равна 20.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} 3|x-2|+|y|=3, \\ ax-y+2a+2=0 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

С6. Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. При этом в автобус типа В входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа А.

А) Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях?

Б) Определите число всех возможных вариантов количества школьников, которых можно перевезти при указанных условиях.

Вариант - 6

С1. Дано уравнение $3\cos 2x + 13\sin x - 9 = 0$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

С2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция ABCD с основаниями AD=20, BC=10 и боковой стороной AB=13. Высота призмы равна 9. Найдите расстояние от точки C до плоскости ADC_1B_1.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{3^{x+1}-1}{\log_3 x - 2} \le 0, \\ |\log_2 x - 1| \ge 2. \end{cases}$

С4. В равнобокой трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 20 и 8, а боковая сторона равна 10. Через вершину A проведена прямая, делящая площадь трапеции в отношении 1:3 и пересекающая прямую BC в точке K. Найдите длину отрезка KC.

С5. Найдите все значения *a*, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = |x^2 - 6x + 5| - ax - 3a$ меньше 2.

С6. Число *B* равно $101^2 + 102^2 + 103^2 + .. + 199^2 + 200^2$. Можно ли это число *B* представить в виде суммы квадратов:

а) 99 различных натуральных чисел?

б) 101 различного натурального числа?

Вариант – 7

С1. Дано уравнение $\cos x - 2\sin 2x = 1 + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

С2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^{\log_3 x} \geq 9x, \\ \sqrt{4x^2 - 5x + 1} < 2x. \end{cases}$

С4. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром в точке O. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3, а $\sin \angle AOB = 0{,}6$.

С5. Найдите все значения *a*, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2x + 2|x - a| + |x - 1|$ больше 3.

С6. Даны две бесконечные арифметические прогрессии: 1) -192; -185; -178; … и 2) -195; -189; -183; … Последовательность (a_n) состоит из всех общих членов этих прогрессий, взятых в порядке их возрастания.

А) Докажите, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией.

Б) Найдите наименьший по модулю член последовательности (a_n).

В) Пусть S_n – сумма *n* первых членов последовательности (a_n). Какое наименьшее значение может принимать S_n ?

Вариант - 8.

C1. Дано уравнение $6\cos 2x - 13\sin x - 2 = 0$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.

C2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ каждое ребро равно $2\sqrt{3}$. Определите расстояние между прямыми AD_1 и CB_1.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^{|2\sqrt{3}x-1|} < 2, \\ \log_x^2(1-x) - \dfrac{3}{\log_{1-x} x} + 2 \le 0. \end{cases}$

C4. Сторона BC прямоугольного треугольника ABC является диаметром окружности. Эта окружность пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите хорду BK, если известно, что площадь треугольника ABC равна 3, а один катет этого треугольника вдвое больше другого.

C5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых функция $f(x) = |x-2| \cdot (x+2) - |x-a| + a$ принимает значение, равное *a*, ровно в трех точках.

C6. а) Найдите какое-либо натуральное число, у которого ровно 10 делителей (включая 1 и само число).

б) Найдите наименьшее натуральное число, у которого ровно 10 делителей.

в) Найдите количество трехзначных нечетных натуральных чисел, у которых ровно 10 делителей.

Вариант -9

C1. Дано уравнение $6\sin x\cos 2x+4=8\sin x+3\cos 2x$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi;0]$.

C2. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб со стороной $2\sqrt{3}$ и углом B, равным 120^0. Найдите угол, который образует плоскость ABD_1 с основанием призмы, если известно, что расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 4.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 9^x-3^{x+2}+18\geq 0, \\ \log_{\frac{3}{2}} x-\log^2_{\frac{3}{2}} x<0. \end{cases}$

C4. Все вершины квадрата лежат на сторонах равнобедренного треугольника ABC, основание AC которого равно 12, а боковая сторона AB равна 10. Найдите сторону квадрата.

C5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых графики функций $f(x)=||x+1|-3|+4a$ и $g(x)=ax+1$ имеют ровно четыре общих точки.

C6. Завод изготовил 47 одинаковых деталей, которые он упаковал в коробки двух типов A и B. Известно, что в коробку типа A помещается на одну деталь меньше, чем в коробку типа B.

а) Сколько коробок типа B могло быть использовано при упаковке, если коробок типа A было использовано три?

б) Какое максимальное количество деталей могло при этом поместиться в коробку типа B?

Вариант -10

С1. Дано уравнение $(2\cos x-1)\sqrt{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}=0$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 5\pi]$.

С2. AB – диаметр нижнего основания цилиндра, хорда CD параллельна AB и лежит в плоскости верхнего основания цилиндра. Найдите угол между образующей цилиндра и плоскостью ABC, если известно, что высота цилиндра равна $12\sqrt{3}$, а хорда CD равна 10 и стягивает дугу окружности, равную 60^0.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^{2x+1}-15\cdot 2^x+7>0, \\ \dfrac{\log_2^2 x-3\log_2 x+2}{\log_2 x}\le 0. \end{cases}$

С4. Точка K делит диагональ AC квадрата ABCD в отношении 1:3. Прямые BK и CD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника KPC, если сторона квадрата равна 4.

С5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-4|x|-ax-5a$ принимает значение, равное -5 в четырех различных точках.

С6. Найдите:

а) какое-либо натуральное число, у которого есть делители, оканчивающиеся любой цифрой от 1 до 9.

а) какое-либо четырехзначное натуральное число, у которого есть делители, оканчивающиеся любой цифрой от 1 до 9.

в) наименьшее натуральное число, у которого есть делители, оканчивающиеся любой цифрой от 1 до 9.

Вариант – 11

С1. Дано уравнение $\sqrt{3}\cos x + 2\sin^2 x + 1 = 0$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

С2. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник с катетами CA=9 и CB=12. Точка К – середина ребра BB_1. Найдите угол, который образует прямая СК с гранью ABB_1A_1, если известно, что расстояние между прямыми BC и A_1B_1 равно 32.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x + \dfrac{5}{2^{x-1}} > 7, \\ 2\log_2^2 x - 3\log_2 x + 1 \geq 0. \end{cases}$

С4. В равнобедренном треугольнике ABC на прямой BC отмечена точка D так, что угол CAD равен углу ABD. Найдите длину отрезка AD, если боковая сторона треугольника ABC равна 5, а его основание равно 6.

С5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых график функции $f(x) = |x-4| \cdot x - x - a$ имеет с осью абсцисс ровно три общие точки.

С6. а) Найдите пять целых чисел, у которых попарные произведения равны

24, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96, 128, 144.

б) Существуют ли пять целых чисел, у которых попарные суммы равны

24, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96, 128, 144 ?

Вариант – 12

С1. Дано уравнение $\sqrt{3}\sin 2x - 2 = 4\sin x - \sqrt{3}\cos x$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi; 5\pi]$.

С2. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна $\sqrt{7}$, а сторона основания равна 6. Найдите угол между плоскостями, содержащими две соседние боковые грани этой пирамиды.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{9^x - 4\cdot 3^x + 3}{3^x - 5} \geq 0, \\ \log_2^2 (x+0{,}5)^2 \leq 4\log_2 x \cdot \log_x (x+0{,}5). \end{cases}$

С4. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен ее основаниям и делит площадь трапеции в отношении 1:2. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны 12 и 24.

С5. Найдите все значения параметра *а*, при каждом уравнение $(a+1-|x-1|)(a+x^2-4x)=0$ имеет четыре различных корня.

С6. Совокупность М состоит из различных натуральных чисел, больших 1.

1) Наименьшее общее кратное всех чисел из М равно 30.

2) Произведение всех чисел из М делится на 40.

3) Для любых двух чисел из М наибольший общий делитель больше единицы.

4) Произведение всех чисел из М не является квадратом целого числа.

А) Найдите все числа, из которых состоит М, если выполняются условия 1, 2, 3.

Б) Найдите все числа, из которых состоит М, если выполняются условия 1, 2, 3, 4.

Вариант – 13

С1. Дано уравнение $\sin 2x - 2\cos^2 x = \cos 2x$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

С2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм ABCD со стороной AD=$2\sqrt{3}$ и углом C=120^0. Найдите расстояние от вершины B_1 до прямой CD, если известно, что точка A_1 удалена от прямой AB на расстояние, равное 4.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2\cdot 8^{x+1} - 3\cdot 4^{x+2} - 2^x + 3 < 0, \\ \log_6 \dfrac{x^2 - x}{x+1} + \dfrac{1}{\log_{x+1} 6} \le 1. \end{cases}$

С4. Отрезок МК с концами на двух сторонах равнобедренного треугольника параллелен третьей стороне и делит площадь треугольника пополам. Найдите длину отрезка МК, если боковые стороны треугольника равны 5, а основание равно 6.

С5. Найдите все значения *a*, при каждом система $\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = \dfrac{a^2 - 2a + 1}{9}, \\ y + \sqrt{3}\,|x| \ge 0. \end{cases}$

имеет ровно два решения. Для каждого такого *a* укажите эти решения.

С6. Имеется набор гирь со следующими свойствами:

1) в нем есть 5 гирь, попарно различных по весу;

2) для любых двух гирь найдутся две другие гири такого же суммарного веса.

А) Докажите, что в таком наборе есть хотя бы две гири одинакового веса.

Б) Докажите, что в таком наборе есть хотя бы четыре гири одинакового веса.

В) Какое наименьшее число гирь может быть в этом наборе?

Вариант – 14

С1. Дано уравнение $\sqrt{10\sin 2x + 10\sin x + 9} = 3$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}\right]$.

С2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = BC = 6$, $AA_1 = 4$. Точка N – середина ребра A_1D_1, а точка M лежит на ребре D_1C_1, причем $D_1M : MC_1 = 2:1$. Определите тангенс угла между плоскостью NMD и гранью AA_1B_1B.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3^x + 2\cdot 3^{2-x} \geq 11, \\ \log_{(x-1)^2}(x-2)^2 \leq 0. \end{cases}$

С4. В трапеции ABCD с основаниями 30 и 10 боковые стороны AB и CD равны соответственно 20 и 24. Прямые AB и CD пересекаются в точке O. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника OBC.

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + 2ax - a^2 + 2a$ на отрезке, заданном условием $|x+1| \leq 2$, не превосходит –5.

С6. Каждое из чисел 3; 4; 9; 10; 12; 15 по одному записывают на шести карточках. Далее карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 3; 4; 9; 10; 12; 15. После этого на каждой карточке подсчитывают модуль разности записанных на ней чисел, а полученные в итоге числа перемножают.

А) Может ли в результате получиться 65?

Б) Может ли в результате получиться 120?

В) Какое наименьшее натуральное число может в результате получиться?

Вариант – 15

С1. Дано уравнение $\log_3\left(\cos x-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\right)=0{,}5$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi;\ -2\pi]$.

С2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат ABCD со стороной 12. Высота призмы равна 9. Найдите расстояние от середины ребра AA_1 до плоскости BCA_1.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases}3\cdot 2^{2x+1}+2\geq 13\cdot 2^x,\\ \log_{x+3}(x^2-x)\leq 1.\end{cases}$

С4. В прямоугольной трапеции с основаниями 18 и 32 тангенс острого угла равен $\frac{12}{7}$. Найдите радиус окружности, касающейся одного из оснований, меньшей боковой стороны и диагонали трапеции.

С5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=x^2-4ax+5a^2$ на отрезке, заданном неравенством $|x|\leq 6$, больше 8.

С6. На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

Вариант – 16

С1. Дано уравнение $\log_2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin x\right)=\frac{1}{2}$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

С2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8, а боковое ребро равно 12. Точка К – середина BB_1. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости АСК.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^{x+0,5}-35\cdot 2^x+48\le 0, \\ \log_x(x^2-7x+12)\le 1. \end{cases}$

С4. В параллелограмме острый угол равен 60^0, периметр равен 30, а площадь равна $28\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся двух сторон и диагонали параллелограмма.

С5. Найдите все положительные значения *a*, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2x^3-3ax^2+5$ на отрезке, заданном неравенством $|x-2|\le 1$, не меньше, чем -3.

С6. На доске записаны два числа 35 и 21. За один ход можно записать натуральное число, равное либо

1) сумме любых двух чисел, имеющихся на доске, либо

2) половине любого числа, имеющегося на доске.

А) Можно ли за несколько ходов получить на доске число 170?

Б) Можно ли за несколько ходов получить на доске число 140?

В) Какое наименьшее натуральное число можно получить на доске?

Вариант – 17

С1. Дано уравнение $4\sin 2x\cos x+3=2(\sin 2x+3\cos x)$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}\right]$.

С2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB=16, BC=12. Расстояние между прямыми AC и C_1D_1 равно 9. Найдите угол между плоскостью BDB_1 и прямой AD_1.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^{x+1}-2^{x+4}+15>0, \\ \log_x(3x-1)^2\le 2. \end{cases}$

С4. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB=8, CB=6. На гипотенузе AC отмечена точка К так, что треугольник ABK – равнобедренный. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK.

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых графики функции $f(x)=(x-4)|x|+a$ $g(x)=|x-a|-a$ имеют ровно две общих точки.

С6. На доске записаны два числа 540 и 450. За один ход можно записать натуральное число, равное либо

1) среднему арифметическому любых двух чисел, уже записанных на доске, либо

2) модулю разности любых двух чисел, уже записанных на доске.

А) Можно ли за несколько ходов получить на доске число 315?

Б) Можно ли за несколько ходов получить на доске число120?

В) Какое наименьшее натуральное число можно получить на доске?

Вариант – 18

С1. Дано уравнение $(1+tg^2x)\sin 2x = 2\sqrt{3}$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

С2. В правильной пирамиде *PABCD* точка *К* середина бокового ребра *PC*. Найдите расстояние от вершины *P* пирамиды до плоскости *BDK*, если известно, что сторона основания пирамиды равна $6\sqrt{2}$, а высота пирамиды равна 8.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x + 5\cdot 2^{-x} < 6, \\ \log_{\frac{2}{x}}(3x^2 - 2x) \le 0. \end{cases}$

С4. В равнобедренный треугольник с основанием 24 и боковой стороной 20 вписана окружность. Найдите длину отрезка, заключенного между двумя сторонами треугольника, параллельного третьей стороне и касающегося окружности.

С5. Найдите все значения *а*, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 4|x| - ax + a$ на отрезке [-1; 3] не меньше, чем -5.

С6. На доске записано число 2. На доске разрешается записывать новые числа, применяя одну из операций:

1) можно увеличить любое из записанных чисел на 3;
2) можно любое из записанных чисел возвести в квадрат.

Можно ли в какой-то момент получить на доске число:

А) 2010;

Б) 2012;

В) 2011?

Вариант – 19

С1. Дано уравнение $2\sin^2 x+\sqrt{2}\cos x=0$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ -\pi]$.

С2. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC=30 и боковой стороной, равной 25. Найдите расстояние от точки C до плоскости ABC_1, если расстояние от точки C до плоскости $A_1B_1C_1$ равно 24

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 9^{x+1}-19\cdot 3^x+2\le 0, \\ \log_{1-x}(2x+3)^2\le 2. \end{cases}$

С4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, а основание равно 12. Окружность с центром на стороне треугольника касается двух других его сторон. Найдите радиус окружности.

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=x^2+2|x-a|$ на множестве, заданном неравенством $|2x-3|\le 3$, не меньше 4.

С6. Набор содержит 22 числа: 1; 2; 3;…; 21; 22.

А) Какое наибольшее количество чисел этого набора необходимо перемножить, чтобы получить квадрат натурального числа?

Б) Сколько при этом будет различных вариантов получения квадрата числа?

В) Какое наибольшее количество чисел этого набора необходимо перемножить, чтобы получить квадрат нечетного натурального числа?

Вариант – 20

С1. Дано уравнение $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos 2x}$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

С2. В правильной четырехугольной пирамиде PABCD высота PH рана 12, а площадь основания ABCD равна 162. На ребре PA взята точка M так, что PM:PA=1:5. Найдите угол, который образует прямая HM с плоскостью основания пирамиды.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^{\log_2 x} \geq \frac{4}{x}, \\ \frac{3^{5x} - 3}{9^x - 30 \cdot 3^x + 81} < 0. \end{cases}$

С4. В прямоугольном треугольнике ABC катеты равны 5 и 12. Прямая, перпендикулярная гипотенузе AB, делит площадь треугольника в отношении 1:8. Найдите длину отрезка этой прямой с концами на сторонах треугольника ABC.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} \sqrt{y^2 + x^2 - 2ax + 4ay + 5a^2} = \sqrt{5}, \\ y = \sqrt{x^2} \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

С6. А) Найдите наименьшее натуральное p, при котором число $p^2+19p+84$ делится на 11.

Б) Найдите наименьшее простое p, при котором число $p^2+19p+84$ делится на 11.

В) Может ли при каком-либо целом p число $p^2+19p+84$ быть квадратом натурального числа?

Вариант – 21

С 1. Дано уравнение $\frac{2}{tg^2 x+1}=\sin 2x$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

С 2. В основании правильной четырехугольной пирамиды PABCD лежит квадрат ABCD со стороной, равной $15\sqrt{2}$. На ребре PB, равном 25, взята точка M так, что PM:MB=2:3. Найдите угол между плоскостями APC и AMC.

С 3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{4^x-25}{2^x-64}\le 0, \\ \log_{x-2}(x^2-8x+15)\le 2. \end{cases}$

С 4. В треугольнике ABC AB=8, BC=7. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BC. Найдите площадь треугольника AA_1C, если известно, что площадь треугольника ABC равна $14\sqrt{3}$.

С 5. Найдите все значения *a*, при каждом из которых график функции $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{|x|}-ax-3a$ имеет на отрезке [-1; 3] не менее двух общих точек с осью абсцисс.

С 6. Рассматривается набор $\{a_1; \ldots; a_n\}$ различных натуральных чисел, больших 1. Известно, что

1) каждое число набора является делителем 60,

2) произведение всех чисел набора равно 60^5.

А) Найдите наибольшее количество чисел в таком наборе.

Б) Найдите наименьшее количество чисел в таком наборе.

В) Сколько существует различных наборов, удовлетворяющих условиям (1) и (2)?

Вариант – 22

С 1. Дано уравнение $2\cos 2x + 8\cos x + 5 = 0$.

А) Решите уравнение.

Б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

С 2. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды $PABCDEF$ равна 2, а боковое ребро равно 3. Найдите угол между прямой PA и плоскостью PBD.

С 3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3^x + 2\cdot 3^{3-x} \le 29, \\ \log_x \dfrac{(2x-5)^3}{x-1} + \log_x \dfrac{x-1}{2x-5} \le 2. \end{cases}$

С 4. Дана трапеция ABCD с боковыми сторонами AB=27, CD=28 и основанием BC=5. Известно, что cos∠BCD=-2/7. Найдите диагональ AC.

С 5. Найдите все значения *a*, при каждом из которых график функции $f(x) = 2x^2 - ax^3$, заданной на отрезке [1; 4], имеет ровно две общие точки с прямой $f(x) = 5x - 4$.

С 6. Сумма четырех наименьших натуральных делителей натурального числа N равна 12, а сумма трех наибольших его делителей находится в интервале (34; 100).

А) Найдите *наименьшее возможное* число N.

Б) Найдите *наибольшее возможное* число N.

В) Укажите количество *всех возможных* чисел N.