ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

ЕГЭ

2012

Математика

Контрольные тренировочные материалы с ответами и комментариями

+ CD

Экзамен с «Просвещением»

$\sqrt{x}$

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ: ЕГЭ

Математика

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

2012

Контрольные тренировочные материалы с ответами и комментариями

Москва
Санкт-Петербург
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2012

УДК 51 (035)
ББК 22.1я2
М 34

Проект «Итоговый контроль»
Серия «Итоговый контроль: ЕГЭ» основана в 2010 году

Руководитель проекта *М. А. ПОЛЯКОВ*
Научный руководитель проекта к. п. н. *Г. С. КОВАЛЁВА*

Авторы: *Ю. М. НЕЙМАН, О. А. БАЮК, Е. Г. МАРКАРЯН*

Математика: ЕГЭ 2012: Контрольные тренировочные мате-
М 34 риалы с ответами и комментариями (Серия «Итоговый контроль: ЕГЭ») / Ю. М. Нейман, О. А. Баюк, Е. Г. Маркарян. — М.; СПб: Просвещение, 2012. — 96 с.: ил.
ISBN 978-5-09-025602-5.

Пособие предназначено для оценки экзаменуемыми степени готовности к ЕГЭ по математике, а также для выявления пробелов в своих знаниях. Оно поможет познакомиться с требованиями, которые предъявляются на ЕГЭ к выполнению заданий разного типа.

Книга содержит варианты заданий, составленных на основе спецификации и демонстрационной версии КИМ ЕГЭ, разработанных Федеральным институтом педагогических измерений (ФИПИ).

Данное пособие может использоваться как для самостоятельной подготовки к ЕГЭ, так и для работы в классе.

К пособию прилагается компакт-диск — электронный тренажёр, содержащий тестовые задания по темам курса.

УДК 51 (035)
ББК 22.1я2

ISBN 978-5-09-025602-5

ВВЕДЕНИЕ

В сборник включены 10 вариантов контрольных тренировочных материалов по математике, составленных на основе демонстрационного варианта и спецификации КИМ для проведения ЕГЭ 2012 года, разработанных Федеральным институтом педагогических измерений по заданию Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации.

Предложенные в пособии варианты экзаменационных работ позволят вам не только потренироваться в выполнении тех видов заданий, которые традиционно включаются в ЕГЭ по математике, но и оценить свои знания в преддверии ЕГЭ. Поэтому пособие и называется «Контрольные тренировочные материалы».

Все варианты заданий в представленном сборнике по типу, структуре и уровню сложности максимально приближены к будущим экзаменационным заданиям 2012 года.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 минут). Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий (B1–B14) базового уровня. Ответом на задания B1–B14 служит конечная десятичная дробь или целое число.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6). При их выполнении требуется представить подробное решение и сформулировать окончательный ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Указания к решению некоторых заданий снабжены ссылкой на соответствующий пример (отмечен знаком *) из учебного пособия: Нейман Ю. М., Королёва Т. М., Маркарян Е. Г. Математика: ЕГЭ: Учебно-справочные материалы. — М., СПб.: Просвещение, 2011.

Использование пособия «Контрольные тренировочные материалы» в комплекте с «Учебно-справочными материалами» позволит вам более эффективно подготовиться к ЕГЭ.

Желаем успеха!

Вариант 1

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Пенал имеет форму параллелепипеда с размерами 25 см, 6,3 см, 5,5 см. Какое наибольшее число карандашей диаметром 0,8 см и длиной 20 см можно уложить в пенал?

B2 На чертеже (рис. B2.1) представлена зависимость цены акции некоторого предприятия в тысячах рублей на конец суток (по оси абсцисс отложены дни месяца). Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений цены.

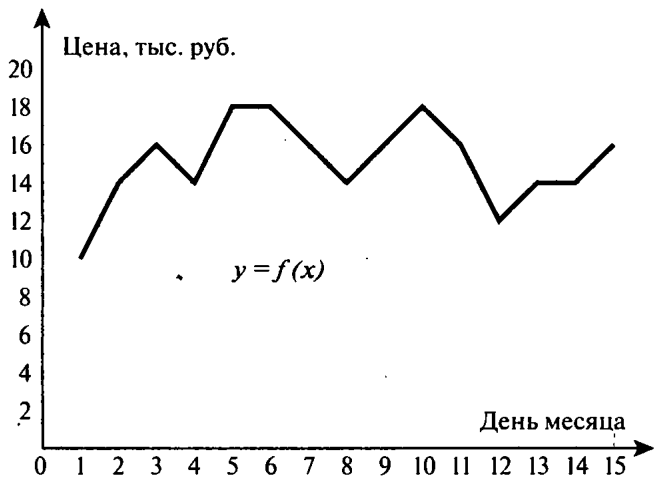

Рис. B2.1

B3 Найдите корень уравнения $2^{x+2} - 2^{x+1} = 64$.

B4 В треугольнике ABC высота, опущенная из вершины B, равна 20; $\angle BAC = 45^\circ$. Кроме того, $CD = 2AD$ (D — точка пересечения высоты BD со стороной AC). Найдите площадь треугольника ABC.

B5 Найдите наибольшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, если первый член прогрессии $a_1 = 183$ и разность $d = -12$.

B6 Найдите площадь в квадратных сантиметрах четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. B6.1).

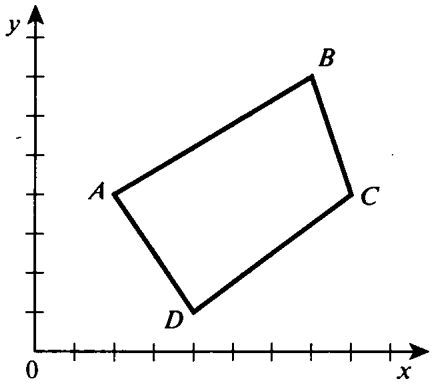

Рис. B6.1

B7 Вычислите значение дроби $\frac{a^2 + 3b^2}{4ab - 6b^2}$, если $\frac{a + 4b}{2a + b} = 1$.

B8 На чертеже (рис. B8.1) изображён график производной $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-3;3]$. Укажите число точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x$.

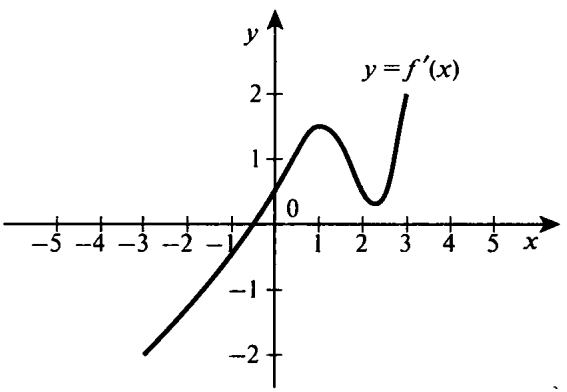

Рис. B8.1

B9 Найдите объём пирамиды $SABC$, если известны координаты её вершин:

$$A\,(0, 0, 0),\ B\,(0, 3, 0),\ C\,(2, 0, 0),\ S\,(0, 0, 4).$$

B10 Найдите вероятность выпадения чётного числа очков при подбрасывании игрального кубика.

B11 Шар вписан в цилиндр (т. е. общие точки цилиндра и шара — центры оснований цилиндра и окружность, являющаяся сечением цилиндра плоскостью, параллельной его основаниям и равноудалённой от оснований). Полная поверхность цилиндра равна 54π. Объём шара равен $m\pi$. Найдите значение m.

B12 Пусть m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^2-6x+10$ при условии, что x удовлетворяет неравенству $x^2-3x-4\leqslant 0$. Найдите $m+M$.

B13 Из пунктов А и В навстречу друг другу выехали одновременно два автобуса. Первый, имея вдвое большую скорость, проехал весь путь на 2 ч быстрее второго. На сколько минут позже произошла бы их встреча, если бы скорость первого уменьшилась до скорости второго автобуса?

B14 Найдите количество целых значений функции $y=x+\dfrac{16}{x-1}$ на отрезке $[-4;\ 0]$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1—C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(1-\sin 2x-4\cos^2 x)(\sqrt{-\operatorname{tg} x}+1)=0$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ длина стороны основания равна 10, высота

пирамиды SO равна $5\sqrt{6}$. Точка K делит боковое ребро SC пополам. Найдите величину (в градусах) двугранного угла, образованного плоскостями BCD и KBD.

C3 Решите неравенство $2\log_{\frac{1}{2}}^2 x-(4x-1)\log_{\frac{1}{2}} x+2x^2-x-1\leqslant 0$.

C4 В трапеции $ABCD$ основания $AD=7$, $BC=6$, диагонали $AC=12$, $BD=5$. Найдите площадь трапеции.

C5 При каких отрицательных значениях a система неравенств

$$\begin{cases}3a-x>2\sqrt{ax},\\ x-\dfrac{6}{a}>\sqrt{\dfrac{x}{a}}\end{cases}$$ имеет решение?

C6 Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases}x^2+2(y+1)x+1-2y+2y^2<0,\\ \log_2(y-1)+\log_3(x^2+xy-y+8)=2.\end{cases}$$

Вариант 2

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 В ящик для посылки, имеющий размеры 60 см, 45 см, 30 см, укладывают мячи диаметром 14 см. Какое наибольшее число мячей можно поместить в этот ящик?

B2 На чертеже (рис. B2.2) представлена зависимость цены акции некоторого предприятия в тысячах рублей на конец суток (по оси абсцисс отложены дни месяца). Найдите дату, соответствующую наименьшему значению цены.

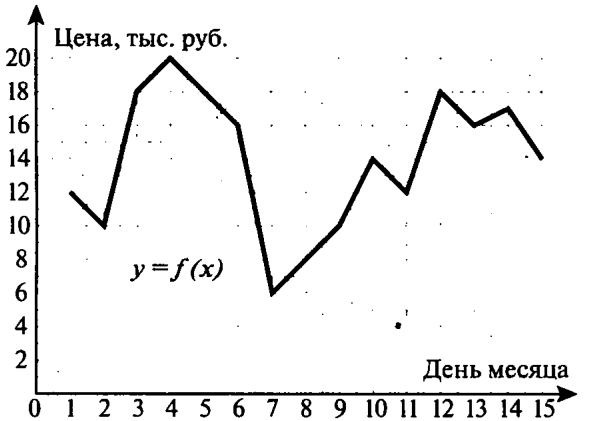

Рис. B2.2

B3 Найдите корень уравнения $7^x + 5 \cdot 7^{x-2} = 54$.

B4 В треугольнике ABC $\angle ABC = 45°$, $AB = AC = 10$. Найдите площадь треугольника ABC.

B5 Найдите наименьшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, если первый член прогрессии $a_1 = -145$ и разность $d = 14$.

B6 Найдите площадь в квадратных сантиметрах четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. B6.2).

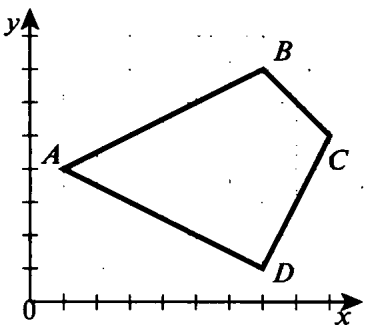

Рис. B6.2

B7 Найдите значение $a + b + c + d$, если числа a, b, c, d подобраны таким образом, что равенство $\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 1}{x + 2} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x + 2}$ выполняется для всех допустимых значений x.

B8 На чертеже (рис. B8.2) изображён график производной $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-3;3]$. Укажите число точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ горизонтальна.

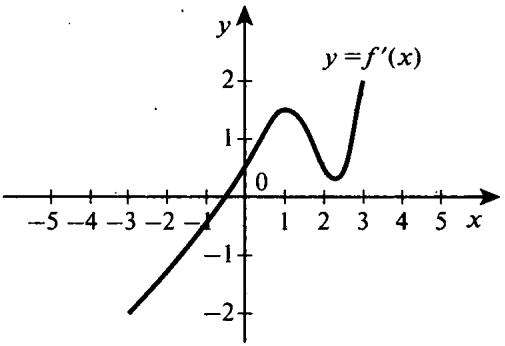

Рис. B8.2

B9 Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, S — точка пересечения диагоналей A_1C_1 и B_1D_1. Площадь сечения AA_1C_1C равна $900\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды $SABCD$.

B10 Найдите вероятность выпадения простого числа очков при подбрасывании игрального кубика.

B11 Объём шара равен 36π м^3. Найдите объём куба (в кубических метрах), ребро которого в 4 раза длиннее радиуса шара.

B12 Пусть m и M соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=-x^2+4x-1$ при условии, что x удовлетворяет неравенству $x^2+x-2\leqslant 0$. Найдите $m\cdot M$.

B13 После того, как к двум рабочим присоединился третий, их общая производительность возросла в два раза. Какова в процентах производительность третьего рабочего относительно производительности второго, если первый и третий рабочие за две смены выполняют тот же объём работы, что второй рабочий за пять смен?

B14 Найдите на отрезке $[0;\pi]$ количество целых значений функции $y=3\sqrt{2}\sin x-3x$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 Решите уравнение $(\sqrt{9-11\cos^2 x+\sin x}+\sin x)\cdot \operatorname{tg} x=0$.

С2 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точки M и N являются серединами боковых рёбер SB и SC соответственно. Двугранный угол, образованный плоскостями AMN и ABC, равен $30°$. Высота пирамиды, опущенная из вершины S, равна $10\sqrt{3}$. Найдите длину стороны основания пирамиды.

С3 Решите неравенство $\log_5(2x+1)\log_3(2x+1)+(x-3)\log_3(2x+1)+(x-2)\log_5(2x+1)\leqslant 5x-x^2-6$.

С4 В трапеции $ABCD$ меньшее основание $BC=6$, диагонали $AC=12$, $BD=5$, причём AC перпендикулярна BD. Найдите площадь трапеции.

С5 Найдите все значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=1-a^2-2ay, \\ y=a-|x| \end{cases}$ имеет два решения.

С6 Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} x^2+2(3y-1)x-2-4y+10y^2<0, \\ 2\log_2(y+2)+\log_5(x^2-3xy-3)=2. \end{cases}$$

Вариант 3

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (В1—В12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Десять тетрадей стоили 200 руб. После повышения цены на эту сумму можно купить только семь тетрадей. Какое максимальное число тетрадей можно купить на 750 руб. по новой цене?

B2 Найдите период функции $f(x)=\sin 2\pi x+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

B3 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2}{x+2}-\frac{1}{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

B4 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD=20$ и $BC=10$, $\angle BAD=45^\circ$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

B5 Числа b_1, b_2, b_3 образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой — натуральное число, причём $b_1=4$ и $6b_2-b_3>35$. Найдите сумму первых пяти членов прогрессии.

B6 Найдите площадь в квадратных сантиметрах четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. B6.3).

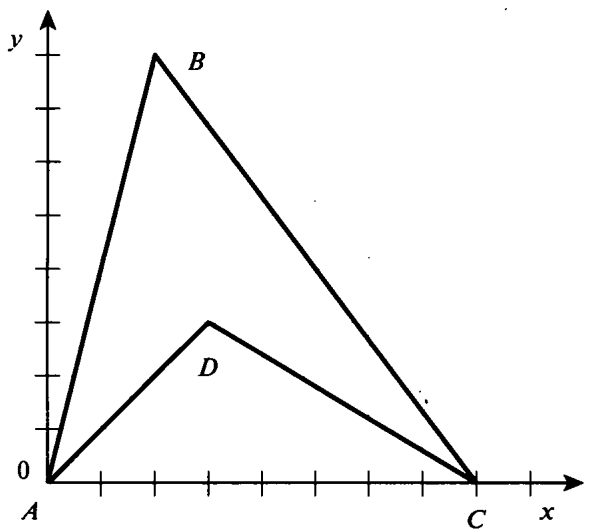

Рис. B6.3

B7 Найдите значение выражения $\sqrt{25^{\log_5 7}-13}$.

B8 На чертеже (рис. B8.3) изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке (4;4). Уравнение касательной $y = kx + b$. Найдите значение $k + b$.

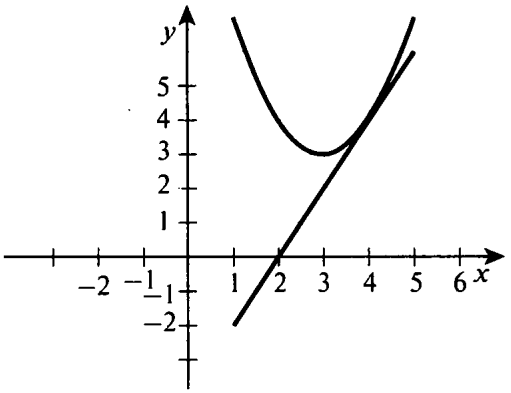

Рис. B8.3

B9 Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания 12 и длиной бокового ребра $6\sqrt{6}$. Точки K, L, M, N — середины боковых рёбер SA, SB, SC и SD. K_1, L_1, M_1, N_1 — проекции точек K, L, M, N на плоскость основания. Найдите объём призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

B10 Подбрасываются две монеты. Найдите вероятность того, что на обеих выпадет герб.

B11 Объём цилиндра, высота которого равна радиусу основания, равен 125π м^3. Найдите полную поверхность куба (в квадратных метрах), ребро которого в 2 раза длиннее радиуса цилиндра.

B12 Амплитуда A установившихся вынужденных колебаний вычисляется по формуле $A = \dfrac{10}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4n\Omega^2}}$, где n — коэффициент трения; ω_0 — собственная частота системы; Ω — частота вынуждающей силы. Пусть $\omega_0 = \Omega = 3$, A_1 — значение амплитуды при $n = 1$, A_2 — значение амплитуды при $n = 4$. Найдите значение отношения $\dfrac{A_1}{A_2}$.

B13 Соревнуются три бригады лесорубов. За одно и то же время первая и третья бригады обработали древесины в два раза больше, чем вторая, а вторая и третья — в три раза больше, чем первая. Какова в процентах производительность первой бригады относительно производительности третьей?

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{2x} + 2^{x+1} - x \cdot \ln 16 + 3$ на отрезке $[-1;2]$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1—C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $g(x) = x^3 + 2x^2 + 4x$, если $g(2x-1) = 4x^2 + 6x - 3$.

C2 На границе большого круга сферы радиусом 10 выбраны точки A, B, C, D. Через точки A и C, B и D проведены круги, перпендикулярные упомянутому большому кругу и пересекающиеся по хорде KL. Найдите длину хорды KD, если точка M — середина хорды KL и $AM = MC = 6$, а $BM = 4$.

C3 Решите неравенство $\sqrt{x + 10 - 6\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x+1} + 2} \leqslant 4$.

C4 В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, D — середина стороны AC. Через точки B и D проведена окружность, причём BD — диаметр этой окружности, K — точка пересечения стороны BC с этой окружностью. Известно, что $BK = 32$, $KC = 18$. Найдите площадь треугольника ABC.

C5 Решите уравнение $\log_{a^3}\left(\dfrac{a^2 - 9}{2a - x}\right) = \log_a \sqrt[3]{x}$, где a — параметр.

C6 Пусть $G(n) = \operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}45^\circ \cdot \operatorname{tg}75^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}(15^\circ + 30^\circ n)$. Вычислите значение $G(2011)$.

Вариант 4

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 15 банок краски стоили 1200 руб. После понижения цены на эту сумму можно купить уже 17 банок. Какое максимальное число банок краски можно купить на 2000 руб. по новой цене?

B2 Найдите значение функции $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}2x$ в точке $\frac{\pi}{2}+6\pi$.

B3 Найдите сумму корней или корень, если он единственный, уравнения $\sqrt{3x^2+3x-5}=-x$.

B4 В трапеции $ABCD$ основание $AD=40$, $\angle BAD=45^\circ$, $\angle ADC=90^\circ$, $BC=CD$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

B5 Числа b_1, b_2, b_3 образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой — целое число, причём $b_1=-4$ и $b_3+4b_2>15$. Найдите сумму первых семи членов прогрессии.

B6 Найдите площадь в квадратных сантиметрах четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. B6.4).

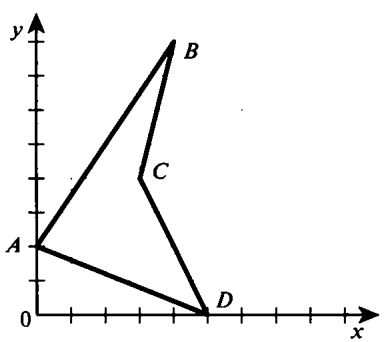

Рис. B6.4

B7 Найдите значение выражения $\left(4^{\log_2\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\sqrt{5}\right)^2$.

B8 На чертеже (рис. B8.4) изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $M_0(2;0)$. Прямая $y=kx+b$ параллельна указанной касательной и проходит через точку $M_1(-2;-1)$. Найдите значение $k+b$.

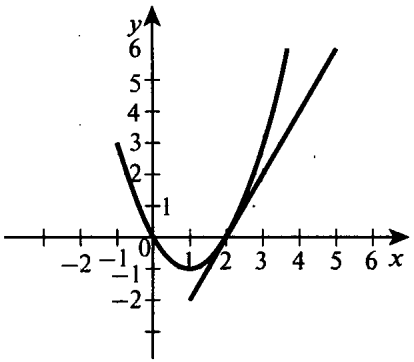

Рис. B8.4

B9 Найдите объём призмы $ADCA_1B_1C_1$, если известны координаты её вершин:

$$A(0,0,0),\ B(0,4,0),\ C(3,0,0),$$
$$A_1(0,0,2),\ B_1(0,4,2),\ C_1(3,0,2).$$

B10 Подбрасываются две монеты. Найдите вероятность того, что выпадут одна цифра и один герб.

B11 Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, S — точка пересечения диагоналей A_1C_1 и B_1D_1 верхнего основания. В квадрат $ABCD$ вписан круг, являющийся основанием конуса с вершиной в точке S. Объём куба равен $\frac{48}{\pi}$. Найдите объём конуса.

B12 Амплитуда A установившихся вынужденных колебаний вычисляется по формуле $A=\frac{24}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+16\Omega^2}}$, где ω_0 — собственная частота системы; Ω — частота вынуждающей силы. Пусть $\omega_0=3$. Найдите значение Ω, при котором амплитуда A равна 2.

B13 Бригада выполняет заказ за 20 дней. Если число рабочих увеличить на одного человека и каждый работал бы в день на

один час дольше, то этот заказ был бы выполнен за 16 дней. Если число рабочих увеличить ещё на шесть человек, а рабочий день — ещё на один час, то этот заказ был бы выполнен за 10 дней. Сколько рабочих было в бригаде ?

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = 5x \cdot \ln 3 - 3^{x+1} - 3^{2x}$ на отрезке $[-1;1]$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1—C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $g(x) = 7x - x^3 + 3$, если $g(2x-3) = 4x^2 - 6x - 1$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны $AB = BC = 2$, $\angle A_1CA = 45°$. Найдите угол (в градусах) между A_1C и C_1D_1.

C3 Решите неравенство $\sqrt{6+x} + \sqrt{-x-2} \geqslant 1 + \sqrt{(6+x)(-x-2)}$.

C4 В треугольнике ABC из вершины B опущена высота BD на сторону AC, BD — диаметр окружности, которая пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, причём $MB = \frac{320}{17}$, $BN = 32$, $NC = 18$. Найдите площадь треугольника ABC.

C5 Решите неравенство $\log_a(1 - 4a^{-x}) \geqslant 2(1-x)$ в зависимости от значений параметра a.

C6 Пусть $F(n) = \text{ctg}15° \cdot \text{ctg}45° \cdot \text{ctg}75° \cdot \ldots \cdot \text{ctg}(15° + 30°n)$. Вычислите значение $F(2011)$.

Вариант 5

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Сбербанк в конце года начисляет 8 % к сумме, находящейся на счету в начале года. Каким станет первоначальный вклад в 5000 руб. через два года?

B2 Пусть $f(x)=3x+4$; $g(x)=2x-1$ и $f(g(x))=ax+b$. Найдите $a+b$.

B3 Найдите корень уравнения $\log_2(x-1)^3=6\log_2 5$.

B4 В трапеции $ABCD$ $\angle BAD=\angle ADC=45^\circ$, BE — высота, причём $BE=BC=10$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

B5 Найдите сумму всех целых чисел m, каждое из которых делится без остатка на 3 и на 5 и удовлетворяет условию $-165<m\leqslant 210$.

B6 Вычислите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известны координаты его вершин $A(1;1)$, $B(3;7)$, $C(7;1)$, $D(4;3)$.

B7 Найдите значение выражения $8\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$, если $\cos\alpha=-0{,}8$.

B8 Уравнение касательной к графику функции $y=\frac{x}{2}(4-x)$, проведённой в точке (4;0), имеет вид $y=kx+b$. Найдите значение $k+b$.

B9 Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, S — точка пересечения диагоналей верхнего основания A_1C_1 и B_1D_1, K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно нижнего основания. Объём пирамиды $SKLMN$ равен 288. Найдите полную поверхность куба.

B10 Из пяти отрезков, длины которых равны 2, 3, 5, 10 и 12 см, наугад выбирается один. Найдите вероятность того, что длина этого отрезка окажется более 5 см.

B11 Даны два конуса, причём радиус основания первого конуса в 2 раза больше радиуса основания второго, а высота первого конуса в 3 раза больше высоты второго. Найдите отношение объёма большего конуса к объёму меньшего конуса.

B12 Пусть $f(x)=1+4x-x^2$, $g(x)=kx-3$, x_0 — точка максимума $f(x)$. Найдите значение параметра k, при котором график функции $g(x)$ проходит через точку $M_0(x_0;f(x_0))$.

B13 Два туриста вышли из пунктов А и В навстречу друг другу и встретились в 8 км от пункта В. Достигнув А и В, туристы сразу повернули обратно и встретились в 6 км от пункта А. Найдите расстояние (в километрах) между пунктами А и В.

B14 Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{x^3}{3}-x|x-3|$ на отрезке $[-4;-2]$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $2^{2x+1}=2^{x+1}+\sqrt{1-2^{x+2}+2^{2(x+1)}}$.

C2 Шар меньшего радиуса находится внутри шара, радиус которого 40, и касается его в точке M. Центр большего шара находится в точке O, причём радиус этого шара, перпендикулярный радиусу OM, делится точкой пересечения с поверхностью малого шара пополам. Найдите разность объёмов этих шаров.

C3 Решите неравенство $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}>\frac{2}{x}$.

C4 В круге с центром O проведены диаметр AD и параллельная ему хорда BC, N — середина этой хорды, Q — ближайшая к N точка окружности. Через точки A и B проведена прямая, которая пересекается с прямой, проведённой через точки O и Q, в точке P. Найдите длину отрезка PQ, если известно, что $AD=20$, $QN=2$.

C5 Решите уравнение $\sqrt{1-p}\sin x-\cos x=\sqrt{p^2+p-6}$, где p — параметр.

C6 Пусть $G(n)=\sin 15^\circ+\sin 45^\circ+\sin 75^\circ+\ldots+\sin(15^\circ+30^\circ n)$. Вычислите значение $G(2011)$.

Вариант 6

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Первоначальная себестоимость продукции понижалась последовательно три раза: первый раз на 5 %, второй раз на 10 % и третий раз на 20 %. На сколько процентов в общей сложности понижена первоначальная стоимость продукции?

B2 Пусть $f(x)=\frac{2}{x-3}$; $g(x)=3x+1$ и $f(g(x))=\frac{a}{bx+c}$. Найдите $ab+c$.

B3 Найдите корень уравнения $\log_8(2-\log_2(x-3))=0$.

B4 В треугольнике ABC BD — высота, опущенная из вершины B, причём основание высоты — точка D — делит сторону AC на равные части $AD=DC=10$. Кроме того, $\operatorname{tg}\angle ABC=0{,}5$. Найдите площадь треугольника ABC.

B5 Студенты в количестве m человек, причём $80<m<100$, отправлены на практику. Если их распределить в бригады по шесть человек, то останутся два студента, не попавшие в бригаду, а если распределить по пять человек в бригаду, то останутся три человека. Сколько студентов отправлено на практику?

B6 Вычислите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известны координаты его вершин $A(-2;-1)$, $B(-2;5)$, $C(6;4)$, $D(6;0)$.

B7 Найдите значение выражения $2\cos 2\alpha+9\sin^2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}4$.

B8 Уравнение касательной к функции $y=2x^2+6x-5$, параллельной прямой $y=-2x$, имеет вид $y=kx+b$. Найдите значение $k+b$.

B9 Найдите объём пирамиды $SABC$, если известны координаты её вершин:

$A\,(3, 0, 0)$, $B\,(0, 0, 0)$, $C\,(0, 4, 0)$, $S\,(1, -2, 5)$.

B10 Из пяти отрезков, длины которых равны 2, 3, 5, 10 и 12 см, наугад выбирается один. Найдите вероятность того, что длина этого отрезка окажется более 3 см и менее 12 см.

B11 Пусть S — вершина конуса, O — центр его основания, O_1 — середина отрезка OS. Через точку O_1 проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Линия пере-

сечения указанной плоскости с боковой поверхностью конуса является границей основания меньшего конуса, вершина которого расположена в точке O. Объём большего конуса равен 1000, а его высота $OS = \frac{30}{\pi}$. Найдите объём меньшего конуса.

B12 Пусть $f(x) = 1 + 4x - x^2$, $g(x) = 4x + b$, x_0 — точка максимума $f(x)$. Найдите значение параметра b, при котором график функции $y = g(x)$ проходит через точку $M_0(x_0; f(x_0))$.

B13 Дано некоторое число больше 200 и меньше 300. Сумма цифр, его составляющих, равна 9, и оно равно $\frac{13}{24}$ числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = x|x^2 + 2x - 3| + (x-1)^2$ на отрезке $[-2;0]$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1—C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение
$$\log_{1-4x}(20x^2 - 9x + 1) - \log_{1-5x}(16x^2 - 8x + 1) = 2.$$

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен $\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$, а объём пирамиды равен $2\sqrt[4]{27}$. Найдите площадь основания ABC.

C3 Решите неравенство
$$\sqrt{(x+2)(3x-1)} \leqslant 1 - 2x + \sqrt{x+2} + \sqrt{3x-1}.$$

C4 В треугольник ABC вписана окружность с центром O, $AB = BC$, BN — высота, K и L — точки касания окружнос-

ти со сторонами AB и BC соответственно, $AK = 3$, $\angle ABC = 2\arcsin 0{,}6$. Найдите расстояние от вершины B до окружности.

C5 Найдите все значения a, при которых неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x \geqslant a \cdot \sin x \cdot \cos x$ выполняется для всех x.

C6 Пусть $G(n) = \cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 75^\circ + \ldots + \cos(15^\circ + 30^\circ n)$. Вычислите значение $G(2011)$.

Вариант 7

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Стол и шкаф вместе стоят 20000 руб., шкаф и диван — 26000 руб., а стол, шкаф и диван вместе стоят 34000 руб. Определите (в рублях) стоимость шкафа.

B2 Укажите номер чётной функции:

1) $2\cos^2 x + x - 3$; 2) $\sqrt{\cos x}$; 3) $2^{\sin x}$; 4) $x\sqrt{1+x^2}$; 5) $\dfrac{1}{x+2}$.

B3 Найдите сумму целых решений неравенства $2^{x^2+3x} < 16$.

B4 В треугольнике ABC $\angle ABC = 90^\circ$, высота, опущенная из вершины B, равна 12, катет $BC = 20$. Найдите площадь треугольника ABC.

B5 В класс принесли корзину яблок. Если каждому школьнику дать по два яблока, то останется 12 яблок, а если дать по три яблока, то пяти школьникам яблок не хватит. Сколько яблок было в корзине?

B6 Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$, если известны координаты его вершин A (1; 2), B (1; 6), C (5; 10), D (7; 4), E (5; 0).

B7 Вычислите tg α, если $\frac{2\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha} = 1$.

B8 Касательная к графику функции $y = x^2 - 6x + 5$, проведённая в точке x_o, параллельна касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$, проведенной в точке $x_1 = \frac{\pi}{4}$. Найдите значение x_o.

B9 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна $4\sqrt[6]{3}$, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60°. Найдите объём пирамиды.

B10 В ящике находятся 10 одинаковых по форме шаров, среди которых имеются 5 белых, 3 чёрных и 2 зелёных. Найдите вероятность того, что вынутый наугад шар не окажется зелёным.

B11 Найдите поверхность шара (в м^2), радиус которого равен диаметру шара объёма $\frac{36}{\sqrt{\pi}}$ м^3.

B12 Пусть $f(x) = 2x + b$, $g(x) = ax^2 + mx + 1$, $f(g(x)) = 2x^2 - 8x + 5$. Найдите наименьшее значение, которое функция $g(x)$ принимает на отрезке [4;7].

B13 Из пунктов А и В навстречу друг другу одновременно выезжают два автомобиля. После встречи первый автомобиль движется с той же скоростью и прибывает в пункт назначения через 2 ч, а второй автомобиль увеличивает скорость на 20 км/ч и прибывает в пункт назначения через 3 ч после встречи. Определите первоначальную скорость второго автомобиля (в км/ч), если расстояние между пунктами А и В равно 300 км.

B14 Найдите количество промежутков убывания функции $f(x)$, если её производная имеет вид $f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)(x - 4)^2$. Области определения $f(x)$ и $f'(x)$ совпадают.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+2(xy+x+y)+5} = \log_2(3+\cos^2 y), \\ x^2+y^2+x-y+1 = 2^{\log_5(1-y^2)}. \end{cases}$$

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра оснований равны 6, а боковые рёбра равны 8. Точки K и L — середины рёбер AA_1 и AD, а точки M и N — середины рёбер AB и BB_1 соответственно. Найдите косинус угла между KL и MN.

C3 Решите неравенство $2^{\sqrt{x}} + \frac{x^2-9x+18}{2^{\sqrt{x}-1}} \leqslant 15-3x$.

C4 Через точку A, лежащую на окружности с центром O, проведена касательная AK. Точка B расположена на окружности, причём длина дуги $\overset{\smile}{AB}$ равна $10\sqrt{3}\pi$, BC — диаметр окружности, $\angle BAK = 30^\circ$. Найдите длину хорды AC.

C5 Решите систему уравнений $\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=b^2 \end{cases}$ при условии $a>0$, $b>0$.

C6 Пусть $F(n) = \frac{1}{2} + \cos 7^\circ + \cos 14^\circ + \ldots + \cos(7^\circ n)$. Вычислите значение $F(360)$.

Вариант 8

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Завод в каждый последующий квартал выпускал на 3200 телевизоров больше, чем в предыдущий. Сколько телевизоров было изготовлено в последний квартал, если годовой выпуск составил 72 400 штук?

B2 Укажите номер функции общего вида

1) $3^{\cos^2 x}$; 2) $\sqrt[3]{\sin x}$; 3) $\frac{1}{x^2+2}$; 4) $x\sin x$; 5) x^2-2x+5.

B3 Найдите сумму целых решений неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2+x} \geqslant \frac{1}{27}$.

B4 В треугольнике ABC $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $\cos\angle ABC = 0{,}6$. Найдите площадь треугольника ABC.

B5 В лыжной секции мальчиков больше, чем девочек. Если количество девочек увеличить вдвое, то общее число спортсменов в секции станет больше 40. Если количество мальчиков увеличить вдвое, то общее число спортсменов станет меньше 44. Сколько всего спортсменов занимается в секции?

B6 Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$, если известны координаты его вершин A (3; 2), B (1; 6), C (5; 4), D (8; 6), E (7; 2).

B7 Вычислите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

B8 Уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - x^2$, параллельной касательной, проведённой к графику этой же функции в точке $x_0 = -\frac{1}{3}$, имеет вид $y = kx + b$. Найдите значение $-2k + b$.

B9 Найдите полную поверхность призмы $ABCA_1B_1C_1$, если известны координаты её вершин:

$$A\,(0, 0, 0),\ B\,(0, 4, 0),\ C\,(3, 0, 0),$$
$$A_1\,(0, 0, 2),\ B_1\,(0, 4, 2),\ C_1\,(3, 0, 2).$$

B10 В ящике находятся 20 одинаковых по форме шаров, среди которых имеются 2 синих, 5 белых, 9 красных и 4 зелёных. Найдите вероятность того, что вынутый наугад шар окажется белым или красным.

B11 Пусть $AB = 8\sqrt[6]{3}$ — диаметр сферы с центром в точке B, C — середина радиуса OB. Через точку C проходит плоскость, перпендикулярная диаметру AB. На окружности, которая является линией пересечения указанной плоскости и сферы, выбраны точки K, L, M, являющиеся вершинами правильного треугольника. Найдите объём пирамиды $AKLM$.

B12 Три пункта A, B, C расположены в вершинах равностороннего треугольника со сторонами 285 км. Из пункта A в пункт B выезжает автомобиль со скоростью 90 км/ч, одновременно из B в C выезжает автомобиль со скоростью 60 км/ч. Через какое время (в часах) расстояние между машинами станет наименьшим?

B13 Двое рабочих выполняют определённую работу. Сначала первый проработал треть времени, необходимого второму для выполнения всей работы, потом второй проработал четверть времени, необходимого первому для выполнения всей работы. После этого оказалось, что выполнено $\frac{2}{3}$ всей работы. Определите, сколько времени (в часах) потребуется первому рабочему для выполнения всей работы, если его производительность выше и вдвоём они выполнят работу за 2 ч 24 мин.

B14 Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, если её производная имеет вид $f'(x)=(x^2+3x-4)(x^2-16)(x^2-1)$. Области определения $f(x)$ и $f'(x)$ совпадают.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1—C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x^2+17+\dfrac{16}{x^2}}=5\cdot 2^{8xy-16x^2-y^2}, \\ \log_2(5x^2-xy+4)=x^2+y+7. \end{cases}$

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длины всех рёбер равны 2, точка K — середина ребра CC_1. Найдите косинус угла между плоскостями ABK и A_1B_1C.

C3 Решите неравенство $x^2\cdot 2^{2x}+18(5x-6)\cdot 2^x+32x^2 \leqslant$ $\leqslant (5x-6)\cdot 2^{2x}+18x^2\cdot 2^x+160x-192.$

C4 Через точку A, лежащую на окружности с центром O, проведена касательная AK. Точки B и C расположены на окружности, длина дуги $\overset{\smile}{BC}=18\pi$, радиус окружности равен 36, $\angle BAK=30^\circ$. Найдите длину хорды AC.

C5 Решите уравнение $x^4-14x^2+8x(4-a)-a^2+8a-15=0$ при различных значениях параметра a.

C6 Пусть $F(n)=\frac{1}{2}+\cos 18^\circ+\cos 36^\circ+\ldots+\cos(18^\circ n)$. Вычислите значение $F(200)$.

Вариант 9

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 В двух фирмах число работников увеличилось: в первой на 28 %, а во второй стало 76 человек вместо 62. В среднем общее число работников увеличилось на 25 %. Сколько работников было изначально в первой фирме?

B2 На чертеже (рис. B2.9) изображён график функции $y = f(x)$, определённой на отрезке $[-7;11]$. Найдите сумму корней уравнения $f(x-2)+3=0$.

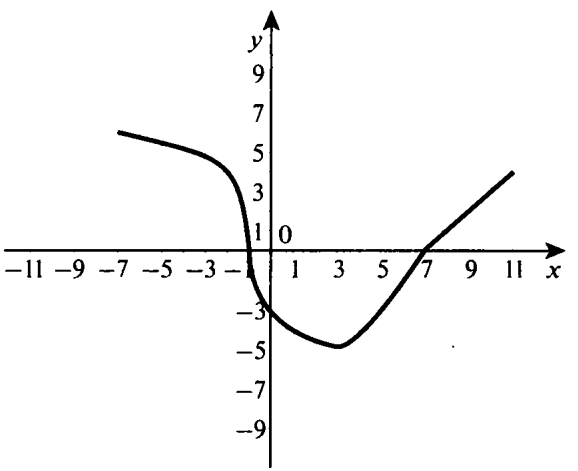

Рис. B2.9

B3 Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{x+2}(x^2+2x-3)=0$.

B4 В треугольнике ABC $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 80$, $\sin\angle ABC = 0{,}6$. Найдите площадь треугольника ABC.

B5 Для освещения дома дважды покупали лампы мощностью 60 Вт и 100 Вт. Первый раз купили не более десяти ламп, причём ламп меньшей мощности было куплено больше. Во второй раз купили не менее семи ламп, при этом ламп в 100 Вт столько же, сколько и в первый раз, а ламп в 60 Вт в два раза меньше. Сколько всего ламп в 100 Вт было куплено?

B6 Вычислите площадь четырёхугольника, ограниченного прямыми $y=2x+4$; $y=-x-2$; $y=4-x$; $y=\frac{x}{2}-2$.

B7 Вычислите $\log_3\left(\frac{1}{2}\log_{64}16\right)$.

B8 Найдите ординату точки пересечения касательной к графику функции $y=-x^2+6x-8$, проведённой в точке $x_0=4$, с осью Oy.

B9 В пирамиде $SABCD$ с прямоугольным основанием $ABCD$ известны координаты вершин $A(0, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $D(8, 0, 0)$, $S(4, 3, 8)$. Найдите площадь сечения ACS.

B10 Подбрасывают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков окажется равной 4. Ответ, используя правило округления, представьте в виде десятичной дроби, содержащей три значащие цифры.

B11 Пусть $AB=8$ — диаметр сферы с центром в точке O, C — середина радиуса OB. Через точку C проходит плоскость, перпендикулярная диаметру AB. На окружности, которая является линией пересечения указанной плоскости и сферы, выбраны точки K, L, M, N, являющиеся вершинами квадрата. Найдите объём пирамиды $AKLMN$.

B12 Объём выпускаемой продукции P некоторой фирмы является функцией ресурсов x и y: $P=-3x^2+(x-2)y+48$. На приобретение ресурсов существует ограничение $3x+y=6$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Найдите максимальный объём выпускаемой продукции.

B13 По окружности радиусом 6 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Первая делает оборот на 6,28 с

быстрее второй. Время между двумя последовательными встречами точек равно 12,56 с. Определите скорость первой точки (в м/с), принимая $\pi \approx 3{,}14$.

B14 Найдите количество целых значений a, при которых функция $y = -\frac{x^3}{3} + (a+2)x^2 - 4x + 10$ не имеет точек экстремума.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1—C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} 4\cos x + 3\cos y = 4, \\ 4\sin x + 3\sin y = 0. \end{cases}$

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ длины сторон основания равны 12, длины боковых сторон равны 20. Точки K и L — середины сторон основания AC и BC, а точки M и N — середины боковых сторон SA и SB. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$.

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^4 - 18x^2 + 82) < \sqrt[4]{6 - x - x^2}$.

C4 В треугольнике ABC стороны $AB = 108$, $BC = 90$, $AC = 72$. Точки K, L, M — середины сторон AC, AB и BC соответственно, O — точка пересечения медиан. Точки P, Q, R — середины отрезков AO, CO и BO соответственно. Найдите площадь общей части треугольников KLM и PQR.

C5 Решите уравнение $\sqrt[4]{(a+x)^2} - 6\sqrt[4]{(a-x)^2} + 5\sqrt[4]{a^2 - x^2} = 0$, где a — параметр.

C6 Сколько различных натуральных чисел, меньших 10^4, можно составить, пользуясь цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы в каждом из них была только одна единица, а любая другая цифра могла встречаться несколько раз?

Вариант 10

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 От долгого хранения зерно теряет в своём весе первый год 10 %, а за каждый последующий год — 5 %. Сколько останется зерна (в тоннах) от 4000 т через три года ?

B2 На чертеже (рис. B2.10) изображён график функции $y = f(x)$, определённой на отрезке $[-5;5]$. Найдите сумму целых решений неравенства $f(x+1) - 2 \leqslant 0$.

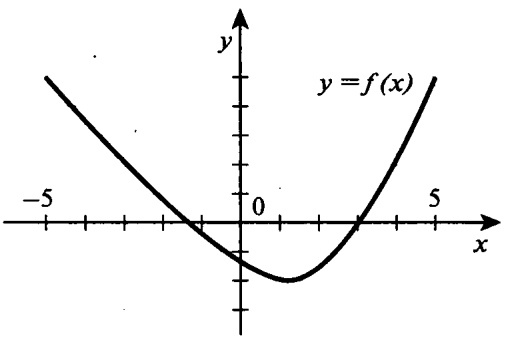

Рис. B2.10

B3 Найдите сумму корней уравнения $|x^2 + 3x - 3| = 1$.

B4 В параллелограмме $ABCD$ сторона $AD = 20$, BE — высота, опущенная из вершины B (точка E принадлежит стороне AD), $AE = 5$, $AB = \sqrt{2}AE$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

B5 Если двузначное число разделить на сумму цифр, его составляющих, то получится в частном 7 и в остатке 6. Если это

число разделить на произведение цифр его составляющих, то получится в частном 3 и в остатке 11. Найдите это число.

B6 Вычислите площадь четырёхугольника, ограниченного линиями $y=|x+2|$; $y=2x+10$; $y=2-2x$.

B7 Вычислите $\log_{36}\log_{25}\sqrt[3]{5}$.

B8 Касательная к графику функции $y=f(x)$, проведённая в точке $x_0=1$ параллельно прямой $y=x$, проходит через точку $M_1(2;\ 3)$. Найдите $f(x_o)$.

B9 В пирамиде $SABCD$ с прямоугольным основанием $ABCD$ известны координаты вершин $A\,(0, 0, 0)$, $B\,(0, 6, 0)$, $D\,(8, 0, 0)$, $S\,(4, 3, 3)$. Найдите площадь грани CDS.

B10 Подбрасывают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков окажется не превосходящей 4. Ответ, используя правило округления, представьте в виде десятичной дроби, содержащей три значащие цифры.

B11 В цилиндр вписан куб. Объём цилиндра равен 4π. Найдите полную поверхность куба.

B12 Объём выпускаемой продукции P некоторой фирмы является функцией ресурсов x и y: $P=-x^2+(x-32)y+329$. На приобретение ресурсов существуют ограничения $x+2y=20$; $x>0$, $y>0$. Пусть x_0 и y_0 — значения ресурсов, при которых величина P достигает максимума. Найдите значение $3(x_0+y_0)$.

B13 Из сосуда, до краёв наполненного кислотой, отлили 1 л кислоты и долили 1 л воды. После перемешивания снова отлили 1 л смеси и долили 1 л воды. В результате этих операций объём кислоты в сосуде стал больше объёма воды на 1,4 л. Определите объём сосуда (в литрах).

B14 Найдите количество целых значений a, при которых функция $y=x^3+3(a-1)x^2+12x-5$ имеет единственную критическую точку.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1—C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin(y-x)\sin(y+x)=\cos^2 x, \\ \sin y \cos x = \frac{1}{2}. \end{cases}$

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ длины боковых рёбер равны 20, а длины сторон основания равны $10\sqrt{2}$. Точки K и L — середины сторон основания AB и AD соответственно, точки M и N — середины боковых рёбер SB и SD соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$.

C3 Решите неравенство $(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x+(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-$ $-\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x \le 2^x+10-x$.

C4 В треугольнике ABC стороны $AB=108$, $BC=90$, $AC=72$. Точки K, L, M — середины сторон AC, AB и BC соответственно, O — точка пересечения медиан. Точки P, R — середины отрезков AO и BO соответственно. Найдите периметр четырёхугольника $KPRM$.

C5 Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+2y}-\sqrt{x-2y}=a, \\ \sqrt{x^2+4y^2}+\sqrt{x^2-4y^2}=a^2, \end{cases}$ где a — параметр.

C6 В четырёхзначном числе сумма цифр тысяч, сотен и десятков равна 16, а сумма цифр сотен, десятков и единиц равна 20, причём цифра десятков на 2 больше цифры единиц. Из всех чисел, удовлетворяющих указанным условиям, найдите такое, у которого сумма квадратов цифр принимает наименьшее значение.

Ответы, указания, решения

Вариант 1

B1 Ответ: 42.

Решение. Очевидно, что по длине пенала укладывается только один карандаш, а по ширине — семь карандашей. Следовательно, в один ряд можно уложить семь карандашей. Количество таких рядов определяется целой частью отношения $\frac{5,5}{0,8}$, равной 6. Таким образом, наибольшее число уложенных в пенал карандашей равно 42.

B2 Ответ: 28. **Указание.** Анализируя график, находим наибольшее $M=18$ и наименьшее $m=10$ значения, тогда $M+m=28$.

B3 Ответ: 5. **Указание.** Вынести 2^{x+1} в левой части уравнения и представить $64=2^6$.

B4 Ответ: 600.

Решение. Рассмотрим треугольник ABD. $\angle BDA=90^\circ$, так как BD — высота, значит, $AD=BD=20$, поскольку $\angle BAC=45^\circ$. По условию $CD=2AD=40$, следовательно, основание $AC=AD+CD=20+40=60$. Таким образом, площадь треугольника $S=\frac{1}{2}BD\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 60=600$.

B5 Ответ: 1488. **Указание.** Найдите граничное значение n_0, для которого a_{n_0} все ещё сохраняет положительное значение. См. пример 4.2.10*.

B6 Ответ: 18. **Указание.** Соедините точки A и C (рис. B6.1). Из чертежа следует, что высота треугольника ABC, опущенная из точки B, равна 3, а основание AC равно 6, следовательно, площадь этого треугольника равна 9. Аналогично находится площадь треугольника ACD, равная 9. Таким образом, площадь четырёхугольника, равная сумме площадей треугольников ABC и ACD, равна 18.

* См. инструкцию по выполнению работы.

B7 Ответ: 2. **Указание.** Из условия $\frac{a+4b}{2a+b}=1$ выразите a через b и подставьте в дробь. См. пример 2.3.10*.

B8 Ответ: 3. **Указание.** В указанных точках значение производной $f'(x)=1$, из графика (см. рис. B8.1) видно, что таких точек три.

B9 Ответ: 4.

Решение. Анализируя координаты вершин пирамиды, замечаем, что вершина A расположена в начале координат, B — на оси Oy, C — на оси Ox, S — на оси Oz. Следовательно, основание ABC пирамиды — прямоугольный треугольник, AS — высота пирамиды, длина которой равна разности аппликат вершин S и A, то есть 4. Тогда объём пирамиды равен $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot 4=4$.

B10 Ответ: 0,5.

Решение. При подбрасывании игрального кубика возможны шесть исходов ($n=6$): выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. При этом благоприятными являются три исхода ($m=3$), соответствующие выпадению 2, 4 или 6 очков. Как известно, вероятностью P наступления события при проведении некоторого опыта называется отношение числа m благоприятных исходов (тех, при которых наступает рассматриваемое событие) к числу n всех возможных исходов: $P=\frac{m}{n}$. Таким образом, в данной задаче $P=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

B11 Ответ: 36.

Решение. Из условия задачи следует, что высота h цилиндра равна диаметру D его основания и диаметру d вписанного шара: $h=2r$; $D=2r$; $d=2r$, где r — радиус шара. Как известно, площадь поверхности цилиндра $S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi(r^2+2r^2)=6\pi r^2=54\pi$, значит, $r=3$. Объём V шара вычисляется по формуле: $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi 3^3=36\pi=m\pi$. Тогда $m=36$.

B12 Ответ: 18.

Решение. Решением неравенства $x^2-3x-4\leqslant 0$ является отрезок $[-1;4]$. Значит, m и M — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-1;4]$. Критическая точка функции $x_0=3$ принадлежит отрезку $[-1;4]$. Найдём значения

функции в точках -1; 3; 4: $f(3)=9-18+10=1$, $f(-1)=1+6+10=17$, $f(4)=16-24+10=2$. Тогда $m=1$, $M=17$, $m+M=18$.

B13 Ответ: 40.

Решение. Пусть S км — расстояние от A до B и x км/ч — скорость второго автобуса, а $2x$ км/ч — скорость первого. Из условий задачи следует, что $\frac{S}{x}=\frac{S}{2x}+2$. Отсюда $\frac{S}{x}=4$. Обозначим t — время встречи автобусов. Тогда $2xt+xt=S$ и $t=\frac{S}{3x}=\frac{4}{3}$ ч. Если скорость первого автобуса уменьшится до x км/ч, то время встречи t_1 определяется из равенства $xt_1+xt_1=S$ и $t_1=\frac{S}{2x}=2$ ч.

Следовательно, встреча произошла бы на $2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$ ч или на 40 мин позже.

B14 Ответ: 10. **Указание.** См. пример 8.2.19*.

Решение. Поскольку функция $y=x+\frac{16}{x-1}$ непрерывна на промежутке $[-4;0]$, она принимает наибольшее $f_{\text{наиб.}}$ и наименьшее $f_{\text{наим.}}$ значения на этом множестве, и все её значения при $x\in[-4;0]$ принадлежат отрезку $[f_{\text{наим.}};\ f_{\text{наиб.}}]$. Для определения $f_{\text{наим.}}$ и $f_{\text{наиб.}}$ найдём критические точки функции, принадлежащие промежутку $[-4;0]$. С этой целью вычислим y' и решим уравнение $y'=0$: $y'=1-\frac{16}{(x-1)^2}=0$. Откуда следует, что $x_1=5$, $x_2=-3\in[-4;0]$.

Вычислим значения функции $f(x)=x+\frac{16}{x-1}$ в точках $x=-4$, $x=-3$, $x=0$: $f(-4)=-7{,}2$; $f(-3)=-7$; $f(0)=-16$. Следовательно, $f_{\text{наиб.}}=-7$, $f_{\text{наим.}}=-16$ и множество $[-16;-7]$ содержит 10 целых значений.

C1 Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x=0;\\ \operatorname{tg} x\le 0.\end{cases}$ Поскольку $\cos x\ne 0$, то, разделив первое уравнение на $\cos^2 x$, получим $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x-3=0$. Откуда следует, что $\operatorname{tg} x=-1$ и $\operatorname{tg} x=3$. Но, учитывая второе условие системы, выбираем $\operatorname{tg} x=-1$ и $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

C2 Ответ: 60°. **Решение.**

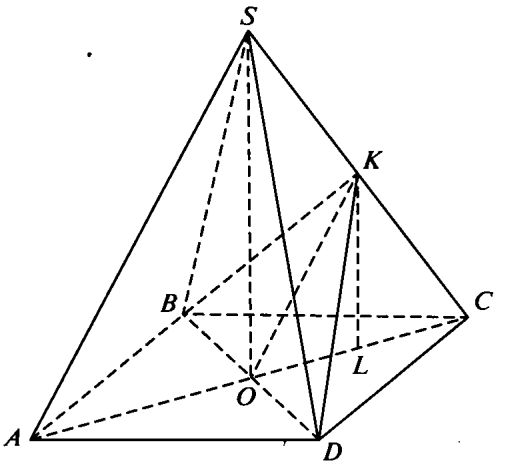

Рис. C2.1

Легко доказать, что двугранный угол между плоскостями BCD и KBD равен $\angle KOC$ (см. рис. C2.1). Опустим из точки K перпендикуляр KL на плоскость $ABCD$. Очевидно, что KL — средняя линия треугольника SCO, поэтому $OL=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{4}AC=\frac{1}{4}\sqrt{10^2+10^2}=$ $=\frac{10}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $KL=\frac{1}{2}SO=\frac{1}{2}5\sqrt{6}$, $\operatorname{tg}\angle KOC=\frac{KL}{OL}=\frac{5}{2}\sqrt{6}:\frac{5}{2}\sqrt{2}=\sqrt{3}$. Тогда $\angle KOC=60°$.

C3 Ответ: $\left[\frac{1}{2};1\right]$. **Указание.** См. пример 7.6.8*.

Решение. Данное неравенство рассматривается на множестве $x>0$. Левую часть неравенства можно представить как квадратный трёхчлен относительно $\log_{1/2}x$. Оно решается путём разложения квадратного трёхчлена на множители. Обозначим $\log_{1/2}x=t$ и запишем неравенство в виде $2t^2-(4x-1)t+$ $+2x^2-x-1\leqslant 0$. Найдём дискриминант квадратного трёхчлена по переменной t. $D=(4x-1)^2-8(2x^2-x-1)=9$. Тогда корни квадратного трёхчлена t_1 и t_2 имеют вид: $t_1=x+\frac{1}{2}$, $t_2=x-1$ и $2t^2-(4x-1)t+2x^2-x-1=2(t-x-\frac{1}{2})(t-x+1)$. Таким образом, исходное неравенство представим в виде $(\log_{1/2}x-x-\frac{1}{2})(\log_{1/2}x-$

$-x+1) \leqslant 0$. Функция $y_1 = \log_{1/2} x - x - \frac{1}{2}$ монотонно убывает на множестве $x>0$, причём $y_1 = 0$ при $x = \frac{1}{2}$. Следовательно, $y_1 > 0$ при $0 < x < \frac{1}{2}$ и $y_1 < 0$ при $x > \frac{1}{2}$. Функция $y_2 = \log_{1/2} x - x + 1$ также монотонно убывает при $x > 0$ и $y_2 = 0$ при $x = 1$. Следовательно, $y_2 > 0$ при $0 < x < 1$ и $y_2 < 0$ при $x > 1$. Тогда на интервале $\left(\frac{1}{2};1\right)$ функции y_1 и y_2 имеют разные знаки и $y_1 \cdot y_2 < 0$. Значит, решением исходного неравенства является промежуток $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

C4 Ответ: 30.

Решение. Выполним дополнительные построения. Проведём отрезок CE, равный и параллельный диагонали BD. Сторону AD продолжим до пересечения с отрезком CE (см. рис. C4.1).

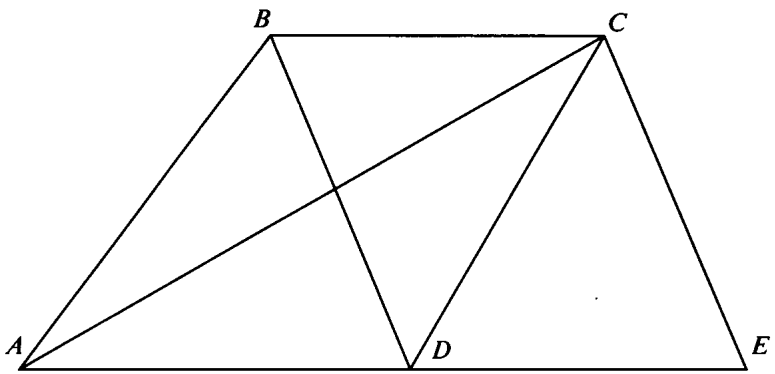

Рис. C4.1

Рассмотрим треугольник ACE. Его высота, опущенная из вершины C, является также высотой трапеции $ABCD$. Очевидно, что сторона $AE = AD + DE = AD + BC = 7 + 6 = 13$. Действительно, поскольку по построению CE равна и параллельна BD, $BCED$ — параллелограмм, значит, $DE = BC = 6$. По условию $AC = 12$. Получается, площадь трапеции $ABCD$ $S = \frac{1}{2}h \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2}h \cdot (AD + DE) = \frac{1}{2}h \cdot AE = S_{\Delta ACE}$. Из соотношения $AE^2 = 13^2 = 169 = 12^2 + 5^2 = AC^2 + CE^2$ следует, что ΔACE — прямоугольный, значит, $S_{\Delta ACE} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$. Таким образом, $S = 30$.

C5 Ответ: $\left(-\frac{2}{3};0\right)$.

Решение. По условию $a<0$ и $ax \geqslant 0$, поэтому $x \leqslant 0$. При $x=0$ не выполняется первое неравенство системы. Следовательно, $x<0$. Из первого неравенства $3a-x>0$ и $x<3a$. Из второго неравенства $x-\frac{6}{a}>0$ и $x>\frac{6}{a}$. Решаем первое неравенство системы. После возведения в квадрат получим $x^2-10ax+9a^2>0$. Откуда следует, что $x \in (-\infty;9a) \cup (a;0)$. Но $x<3a$. Тогда $x \in (-\infty;\ 9a)$. Возведём в квадрат второе неравенство системы $x^2-\frac{13}{a}x+\frac{36}{a^2}>0$. Откуда $x \in \left(-\infty;\ \frac{9}{a}\right) \cup \left(\frac{4}{a};\ 0\right)$. Но $x>\frac{6}{a}$. Тогда $x \in \left(\frac{4}{a};\ 0\right)$.

Для того чтобы система имела решение, интервалы $(-\infty;9a)$ и $\left(\frac{4}{a};0\right)$ должны иметь общие точки, т. е. должно выполняться неравенство $\frac{4}{a}<9a \Leftrightarrow \frac{4-9a^2}{a}<0$ или $4-9a^2>0$. Отсюда $-\frac{2}{3}<a<0$.

C6 Ответ: (–3; 2).

Решение. Неравенство является квадратичным относительно переменной x, при этом y рассматривается как параметр. Решение неравенства существует, если дискриминант $D=4(y+1)^2-4(1-2y+2y^2)>0$. Последнее неравенство имеет три целочисленных решения: 1, 2, 3. При $y=1$ уравнение системы не имеет смысла, при $y=2$ это уравнение имеет два корня: $x_1=-3$, $x_2=1$, причём первый корень удовлетворяет неравенству, второй — нет. Аналогично при $y=3$ это уравнение имеет 2 корня: $x_1=-2$, $x_2=-1$, причём оба не удовлетворяют неравенству.

Вариант 2

B1 Ответ: 24. **Указание.** См. решение B1 вар. 1.

B2 Ответ: 7.

B3 Ответ: 2. **Указание.** Вынести 7^{x-2} в левой части уравнения.

B4 Ответ: 50.

Решение. Поскольку треугольник ABC равнобедренный ($AB = AC$), получается $\angle ACB = \angle ABC = 45^\circ$. Таким образом, $\angle BAC = 90^\circ$, значит, треугольник прямоугольный и его площадь $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$.

B5 Ответ: –825. **Указание.** Найдите граничное значение n_0, для которого a_{n_0} все ещё сохраняет отрицательное значение. См. пример 4.2.10*.

B6 Ответ: 24. **Указание.** См. решение B6 вар. 1.

B7 Ответ: 3. **Указание.** Выполните деление многочленов в левой части равенства. Эту же задачу можно решить по аналогии с примером 2.3.8*.

B8 Ответ: 1. **Указание.** См. решение B8 вар. 1.

B9 Ответ: 9000.

Решение. Обозначим длину ребра куба через a. Тогда диагональ основания куба равна $a\sqrt{2}$, следовательно, площадь сечения AA_1C_1C равна $a^2\sqrt{2} = 900\sqrt{2}$. Отсюда $a = 30$. Высота пирамиды $SABCD$ также равна $a = 30$. Объём пирамиды $V = \frac{1}{3} a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3} = \frac{30^3}{3} = 9000$.

B10 Ответ: 0,5. **Указание.** См. решение задачи B10 вар. 1. При этом необходимо учесть, что в множестве {1, 2, 3, 4, 5, 6} содержатся три простых числа: 2, 3 и 5.

B11 Ответ: 1728.

Решение. Объём шара $V_ш$ определяется по формуле $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3$, где r – радиус шара. По условию $V_ш = 36\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$. Из последнего равенства находим $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot 36} = 3$, отсюда длина ребра куба равна $a = 4r = 12$, следовательно, объём куба равен $V = a^3 = 12^3 = 12 \cdot 144 = 1440 + 288 = 1728$.

B12 Ответ: –26. **Указание.** См. решение B12 вар. 1. Следует учесть, что точка максимума функции расположена вне рассматриваемого отрезка.

B13 Ответ: 175.

Решение. Пусть V_1, V_2, V_3 — производительность труда соответственно первого, второго и третьего рабочих. По условию задачи $V_1 + V_2 + V_3 = 2(V_1 + V_2)$ и $2(V_1 + V_3) = 5V_2$. Выразим V_1 из первого и второго уравнений через V_2 и V_3: $V_1 = V_3 - V_2$ и $V_1 = \frac{5}{2}V_2 - V_3$. Тогда $V_3 - V_2 = \frac{5}{2}V_2 - V_3$. Откуда $V_3 = \frac{7}{4}V_2 = 1{,}75V_2$.

B14 Ответ: 10. **Указание.** См. решение B14 вар. 1.

C1 Ответ: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) переменной x данного уравнения определяется системой $\begin{cases} \cos x \neq 0; \\ 9 - 11\cos^2 x + \sin x \geq 0. \end{cases}$

На ОДЗ данное уравнение равносильно совокупности вида

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0; \\ \sqrt{9 - 11\cos^2 x + \sin x} = -\sin x. \end{array}\right.$$

Если $\operatorname{tg} x = 0$, то $\sin x = 0$ и $\cos^2 x = 1$. Тогда не выполняется второе неравенство, задающее ОДЗ уравнения. Следовательно, $\operatorname{tg} x \neq 0$.

Если $\sqrt{9 - 11\cos^2 x + \sin x} = -\sin x$, то после возведения в квадрат получим $9 - 11\cos^2 x + \sin x = \sin^2 x$ или $10\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$. Откуда следует, что $\sin x = \frac{2}{5}$ и $\sin x = -\frac{1}{2}$. Но $\sin x = \frac{2}{5}$ не подходит, так как $\sin x < 0$ по смыслу второго уравнения совокупности. Следовательно, $\sin x = -\frac{1}{2}$. Действительно, это значение удовлетворя-

ет как ОДЗ, так и второму уравнению совокупности. Тогда $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

C2 Ответ. 20.

Решение. Пирамида изображена на рис. C2.2. Рассмотрим следующие точки: O — точка пересечения диагоналей AC и BD; L — середина MN; P — середина AD; Q — середина OS; E — проекция точки L на плоскость $ABCD$; F — середина BC.

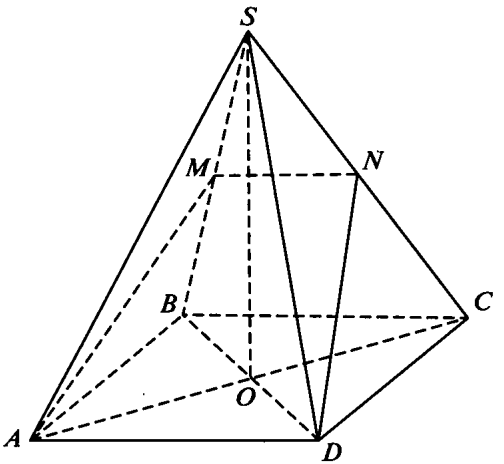

Рис. C2.2

Обозначим искомое значение стороны основания через x. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью PSO (см. рис. C2.2а). Очевидно, что указанная плоскость проходит через через точки L, Q, E.

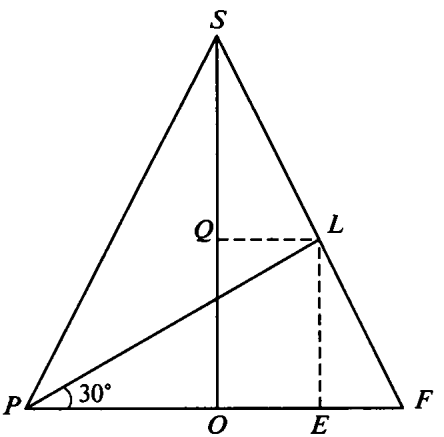

Рис. C2.2а

Легко убедиться, что $\angle LPO = 30^\circ$, $PF = x$, $OP = OF = \frac{x}{2}$, а LE и QL — средние линии треугольника SOF. Следовательно, $OE = QL = \frac{x}{4}$; $LE = \frac{1}{2}SO = 5\sqrt{3}$, $PE = LE \cdot \mathrm{ctg}30^\circ = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 15$. В то же время $PE = OP + OE = \frac{3}{4}x$, значит, $\frac{3}{4}x = 15$, отсюда $x = 20$.

C3 Ответ. [1;2]. **Указание.** См. решение C3 вар. 1.

Решение. Методом группировки данное неравенство можно разложить на множители. Действительно, $\log_5(2x+1)[\log_3(2x+1)+x-2]+(x-3)\log_3(2x+1)+(x-3)(x-2) \le 0$ или $\left[\log_3(2x+1)+x-2\right]\cdot\left[\log_5(2x+1)+x-3\right] \le 0$.

Обозначим $y_1 = \log_3(2x+1)+x-2$, $y_2 = \log_5(2x+1)+x-3$. Функции y_1 и y_2 определены на множестве $x > -\frac{1}{2}$ и являются монотонно возрастающими. При $x = 1$ $y_1 = 0$. Следовательно, $y_1 < 0$ при $-\frac{1}{2} < x < 2$ и $y_1 > 0$ при $x > 1$. При $x = 2$ функция $y_2 = 0$. Следовательно, $y_2 < 0$ при $-\frac{1}{2} < x < 2$ и $y_2 > 0$ при $x > 2$. Очевидно, что на отрезке [1;2] $y_1 \cdot y_2 \leqslant 0$. Значит, [1;2] — решение исходного неравенства.

C4 Ответ: 30.

Решение. Выполним дополнительные построения. Проведём отрезок CE, равный и параллельный CD. Продолжим сторону AD до пересечения с CE (см. рис. C4.2).

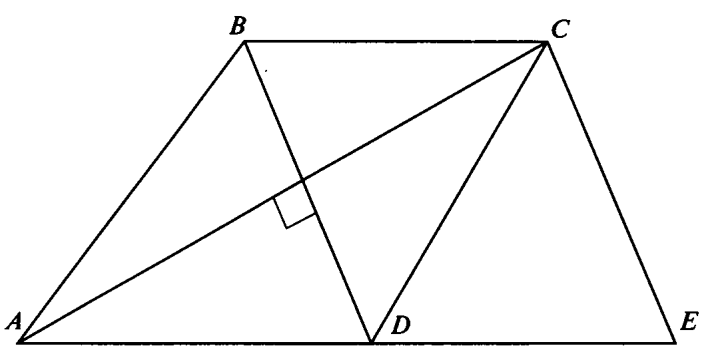

Рис. C4.2

Пусть h — высота треугольника ACE. Легко заметить, что она также является высотой трапеции $ABCD$. Как известно, площадь трапеции $ABCD$ $S=\frac{1}{2}h(AD+BC)$. Поскольку CE равна и параллельна BD, $BCED$ — параллелограмм. Значит, $DE=BC=6$. Следовательно, $S=\frac{1}{2}h(AD+BC)=\frac{1}{2}h(AD+DE)=\frac{1}{2}h\cdot AE=S_{\Delta ACE}$. По условию $BD\perp AC$, а $CE\parallel BD$, поэтому $CE\perp AC$, т. е. ΔACE — прямоугольный, значит, $S_{\Delta ACE}=\frac{1}{2}AC\cdot CE=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=30$, отсюда $S=S_{\Delta ACE}=30$.

C5 Ответ: $a\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\cup\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Решение. Преобразуем первое уравнение системы к виду $x^2+y^2+2ay+a^2=1 \Leftrightarrow x^2+(y+a)^2=1$ (1). Координаты множества точек, принадлежащих окружности, заданной уравнением (1), с центром в точке $(0;-a)$ и единичным радиусом, являются решениями первого уравнения системы.

Второе уравнение системы $y=a-|x|$ задаёт множество точек, представляющих «угол» с вершиной в точке $(0;a)$ (см. рис. C5.2).

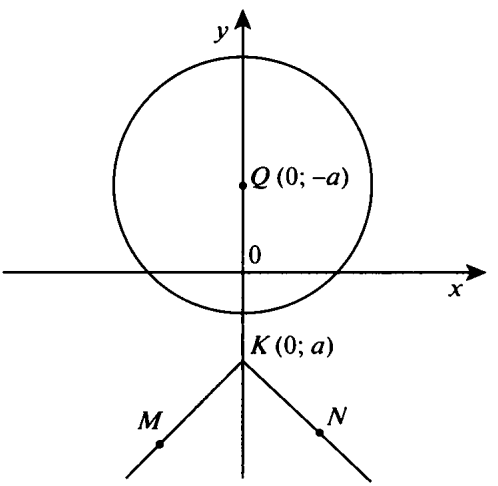

Рис. C5.2

Если $a=0$, то система уравнений принимает вид $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=-|x|. \end{cases}$

Геометрическая интерпретация решения данной системы представлена на рис. C5.2а на с. 45.

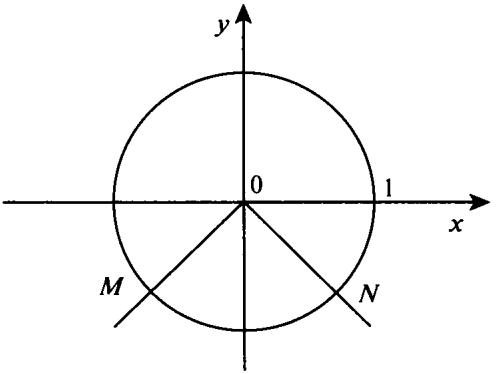

Рис. С5.2а

Окружность и «угол» пересекаются в точках M и N. Следовательно, система имеет два решения.

Если $a<0$, то центр окружности, а именно точка $(0;-a)$ находится выше оси абсцисс, и вершина «угла» $(0;a)$ ниже оси абсцисс. Тогда общие точки окружности и угла будут при условии $-2a \leqslant 1$, т. е. $-\frac{1}{2} \leqslant a<0$. Причём при $a=-\frac{1}{2}$ — одна точка, при $-\frac{1}{2}<a<0$ — две точки.

Если $a>0$, то окружность и «угол» имеют общие точки при условии $0<a \leqslant a_0$ (см. рис. С5.2б на стр. 45).

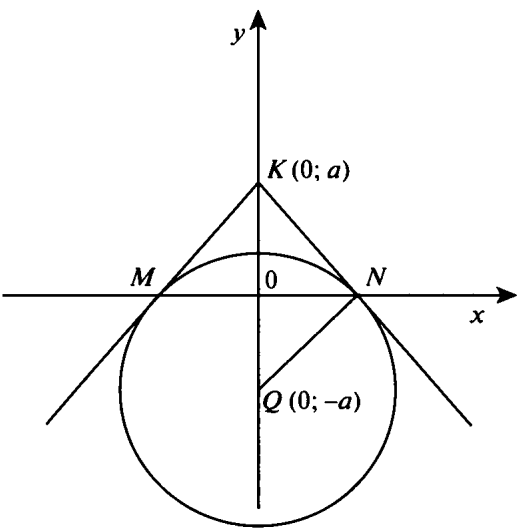

Рис. С5.2б

KN и KM — касательные к окружности, QN — радиус, проведённый в точку касания N. Следовательно, ΔQNK — прямоугольный и равнобедренный ($\angle KQN = 45^\circ$). Поскольку $QK = 2a_o$, $QN = KN = 1$, получается, $4a_o^2 = 2$ и $a_o = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Очевидно, что при $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$ система не имеет решений, а при $0 < a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ окружность и «угол» пересекаются.

Если $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то окружность и угол пересекаются в четырёх точках. Если $a = \frac{1}{2}$, то вершина угла совпадает с верхней точкой окружности, а система имеет три решения. Если $0 < a < \frac{1}{2}$, то вершина «угла» находится внутри окружности, а стороны угла пересекают окружность в двух точках. Анализируя решение, делаем вывод: система уравнений имеет два решения, если $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ и $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C6 Ответ: (4; –1), (2; 0).

Решение. Неравенство является квадратичным относительно переменной x, при этом y рассматривается как параметр. Решение неравенства существует, если дискриминант $D = 4(3y-1)^2 - 4(-2-4y+10y^2) > 0$. Последнее неравенство имеет три целочисленных решения 0, –1, –2. При $y = -2$ уравнение системы не имеет смысла, при $y = -1$ это уравнение имеет два корня $x_1 = -7$, $x_2 = 4$, причём второй корень удовлетворяет неравенству, первый — нет. Аналогично при $y = 0$ это уравнение имеет два корня $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, второй корень удовлетворяет неравенству, первый — нет.

Вариант 3

B1 Ответ: 26.

Решение. Пусть x — максимальное число тетрадей, которое можно купить на 750 руб. по новой цене. Тогда по условию задачи число x равно целой части дроби $\frac{750 \cdot 7}{200}$, т. е. 26.

B2 Ответ: 2.

Решение. Поскольку период функции $\sin x$ равен $T_1 = 2\pi$, получаем $\sin 2\pi x = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin 2\pi(x+1)$. Следовательно, $T = 1$ — наименьший положительный период функции $\sin 2\pi x$. Аналогично $T_2 = 2$ — наименьший положительный период функции $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. Значит, наименьший положительный период функции $f(x) = \sin 2\pi x + \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ равен 2.

B3 Ответ: 2. **Указание.** Возведите в квадрат. Проверка обязательна.

B4 Ответ: 75.

Решение. Опустим из вершин B и C высоты BK и CL на основание AD. Очевидно, что $KL = 10$, $AK = LD = 5$. Поскольку $\angle BAD = \angle CDA = 45^\circ$, следовательно, $BK = CL = 5$. Значит, площадь трапеции $S = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (20 + 10) = 75$.

B5 Ответ: 484.

Решение. Поскольку $b_1 = 4$, получаем $b_2 = 4q$ и $b_3 = 4q^2$, где q — знаменатель прогрессии. Из неравенства $6b_2 - b_3 > 35$ следует, что $4q^2 - 24q + 35 < 0$, а значит: $\frac{5}{2} < q < \frac{7}{2}$. По условию q — натуральное число, следовательно, $q = 3$ и $S_5 = 484$.

B6 Ответ: 20. **Указание.** См. решение B6 вар. 1.

B7 Ответ: 6. **Указание.** Воспользуйтесь основным логарифмическим тождеством.

B8 Ответ: –2. **Указание.** Из графика (см. рис. B8.3) легко определить, что угловой коэффициент касательной ра-

вен 2, т. е. $k=2$. Подставив в уравнение касательной $k=2$, $x=y=4$, находим $b=4-4\cdot 2=-4$, $k+b=2-4=-2$.

B9 Ответ: 216.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей основания пирамиды AC и BD. Поскольку основание пирамиды — квадрат со стороной 12, $AO=6\sqrt{2}$. Рассмотрим треугольник AOS. Очевидно, что K_1K — средняя линия этого треугольника, причём $\angle AK_1K=90^\circ$, тогда $AK=3\sqrt{6}$, $AK_1=3\sqrt{2}$, $K_1K=\sqrt{AK^2-AK_1^2}=$ $=\sqrt{9\cdot 6-9\cdot 2}=6$. K_1N_1 — средняя линия треугольника AOD, следовательно, $K_1N_1=6$. Значит, $KLMNK_1L_1M_1N_1$ — куб, объём которого равен $V=6^2\cdot 6=36\cdot 6=216$.

B10 Ответ: 0,25. **Указание.** См. решение задачи B10 вар. 1.

Решение. При подбрасывании одной монеты возможны два исхода: выпал герб (Г) или выпала цифра (Ц). При подбрасывании двух монет возможны четыре исхода ($n=4$): ГГ, ГЦ, ЦГ и ЦЦ, причём благоприятным является только первый ($m=1$), таким образом, искомая вероятность равна $P=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

B11 Ответ: 600.

B12 Ответ: 2.

Решение. Вычислим A_1 и A_2: $A_1=\frac{10}{\sqrt{(3^2-3^2)+4\cdot 1\cdot 3^2}}=\frac{10}{\sqrt{4\cdot 9}}=\frac{5}{3}$,

$A_2=\frac{10}{\sqrt{(3^2-3^2)+4\cdot 4\cdot 3^2}}=\frac{5}{6}$, отсюда $\frac{A_1}{A_2}=\frac{5}{3}:\frac{5}{6}=2$.

B13 Ответ: 60. **Указание.** См. решение B13 вар. 2.

Решение. Пусть v_1, v_2, v_3 — производительности соответственно первой, второй и третьей бригады. Из условий задачи следует, что $v_1+v_3=2v_2$ и $v_2+v_3=3v_1$. Исключив из этих уравнений v_2, получим $v_1=\frac{3}{5}v_3=0{,}6v_3$.

B14 Ответ: 6. **Указание.** См. пример 8.2.2*.

Решение. Найдём критические точки функции: $y'=2^{2x}\cdot 2\ln 2+2^{x+1}\ln 2-\ln 16=0$, или $2^{2x}+2^x-2=0$, и $x=0$ —

критическая точка, принадлежащая отрезку $[-1;2]$. Определим значение функции в точках $x=-1, x=0, x=2$: $f(-1)=4{,}25+4\ln 2$, $f(0)=6$, $f(2)=27-2\ln 16$. $f_{\text{наим.}}=6$. Действительно, $f(-1)=4{,}25+$ $+4\ln 2>6$, так как $\ln 16>1{,}75$ или $16>e^{1{,}75}$, а $f(2)=27-2\ln 16>19$.

C1 Ответ: $x_1=1$, $x_{2,3}=-1$.

Решение. Обозначим $2x-1=t$ и выразим x: $x=\frac{t+1}{2}$. Тогда $g(t)=4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+6\left(\frac{t+1}{2}\right)-3=t^2+5t+1$. Следовательно, $g(x)=x^2+$ $+5x+1$ и уравнение $g(x)=x^3+2x^2+4x$ принимает вид $x^2+5x+1=x^3+2x^2+4x$ или $x^3+x^2-x-1=0$. Группируя слагаемые, получим $(x+1)(x^2-1)=0$. Откуда следует, что $x_1=1$, $x_{2,3}=-1$.

C2 Ответ: $3\sqrt{13}$.

Решение. Рассмотрим указанный большой круг: AC и BD — хорды этого круга, пересекающиеся в точке M. Согласно теореме о пересекающихся хордах $AM\cdot MC=BM\cdot MD$, отсюда $MD=\frac{AM\cdot MC}{BM}=\frac{6\cdot 6}{4}=9$. Рассмотрим круг, граница которого проходит через точки B,K,D,L. Легко доказать, что BD — диаметр круга, а $KL=AC=AM+MC=6+6=12$. Значит, $KM=6$. Таким образом, $KD=\sqrt{KM^2+MD^2}=\sqrt{6^2+9^2}=3\sqrt{13}$.

C3 Ответ: $[-1;8]$. **Указание.** Введите новую переменную $t=\sqrt{x+1}$.

Решение. Введём новую переменную $t=\sqrt{x+1}\geqslant 0$. Тогда $x=t^2-1$ и $x\geqslant -1$. Перепишем неравенство через переменную t: $\sqrt{t^2+9-6t}+\sqrt{t^2+1+2t}\leqslant 4$ или $\sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t+1)^2}\leqslant 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |t-3|+|t+1|\leqslant 4$. Последнее неравенство решаем методом интервалов. Поскольку $t\geqslant 0$, $|t+1|=t+1$. Поэтому рассматриваем только два интервала: $0\leqslant t\leqslant 3$ и $t>3$.

Если $0\leqslant t\leqslant 3$, то неравенство принимает вид $3-t+t+1\leqslant 4$, или $4\leqslant 4$. Следовательно, $0\leqslant t\leqslant 3$ — решение.

Если $t>3$, то $t-3+t+1\leqslant 4$ и $t\leqslant 3$, а значит, решения нет. Возвращаясь к исходной переменной x, получим $\sqrt{x+1}\leqslant 3$ и $-1\leqslant x\leqslant 8$.

C4 Ответ: 1200. **Решение.**

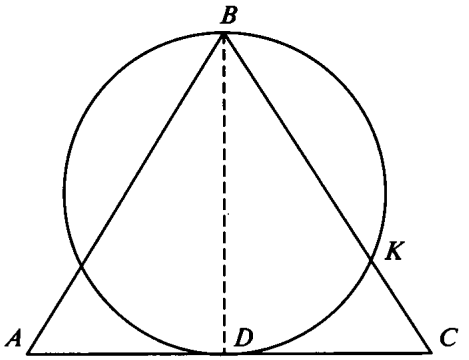

Рис. C4.3

Поскольку D — середина стороны AC, BD — медиана (см. рис. C4.3). Из условия $(AB = BC)$ следует, что треугольник ABC — равнобедренный, значит, BD является также высотой, т. е. $BD \perp AC$. Таким образом, DC — касательная к окружности, проходящей через точки B, D, K. Согласно теореме о касательной и секущей, проведённым к окружности из одной точки, $CB \cdot CK = CD^2$, т. е. $CD^2 = (CK + KB) \cdot CK = (18 + 32) \cdot 18 = 900$. Тогда $CD = 30$ и $AC = 60$. По теореме Пифагора: $BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$ и $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} 40 \cdot 60 = 1200$.

C5 Ответ. Если $a \in (0;1) \cup (1;3)$, то $x = a + 3$; если $a \in (3;+\infty)$, то $x = a \pm 3$; если $a \in (-\infty;0]$, $a = 1$, $a = 3$, то уравнение не имеет решения.

Решение. Исследуем ОДЗ уравнения. Очевидно, что $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Кроме того, $\frac{a^2 - 9}{2a - x} > 0 \Leftrightarrow (a - 3)(a + 3)(2a - x) > 0$. Из этого неравенства следует, что, если $a \in (0;1) \cup (1;3)$, то $a - 3 < 0$ и $2a - x < 0$, а значит, $x > 2a$. Если $a > 3$, то $2a - x > 0$ и $x < 2a$. Из уравнения следует, что $\frac{a^2 - 9}{2a - x} = x$ или $x^2 - 2ax + a^2 - 9 = 0$. Откуда $x = a \pm 3$. Если $a \in (0;1) \cup (1;3)$, то из условия $x > 2a$ следует, что $x = a + 3$. Действительно, $a + 3 > 2a$, так как $a < 3$. Очевидно, что $x = a - 3$ не подходит. Если $a \in (3;+\infty)$, то из условия $x < 2a$ следует, что $x = a \pm 3$. Действительно, $a - 3 < 2a$ и $a + 3 < 2a$ выполняется, если $a > 3$. Если $a \in (-\infty;0] \cup \{1;3\}$, то уравнение не имеет решения.

C6 Ответ: $2-\sqrt{3}$.

Решение. Вычислим $\operatorname{tg} 15^\circ$ и $\operatorname{tg} 75^\circ$: $\operatorname{tg}15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) =$

$$= \frac{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ \cdot \operatorname{tg}30^\circ} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 2-\sqrt{3},\ \operatorname{tg}75^\circ = \operatorname{ctg}15^\circ =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}15^\circ} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}.$$

Учитывая тот факт, что $\operatorname{tg}x$ — нечётная функция, наименьший положительный период которой равен π (или 180°), находим $\operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}45^\circ \cdot \operatorname{tg}75^\circ \cdot \operatorname{tg}105^\circ \cdot \operatorname{tg}135^\circ \cdot \operatorname{tg}165^\circ = (2-\sqrt{3})\cdot 1 \cdot (2+\sqrt{3})\cdot(-2-\sqrt{3})$ $(-1)\cdot(\sqrt{3}-2) = -1$.

Таким образом, произведение тангенсов чисел $15^\circ + 30^\circ n$, принадлежащих одному периоду, равно -1, значит, $G(2011) = \operatorname{tg}15^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}(15^\circ + 30^\circ \cdot 2011) = \operatorname{tg}15^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + 60300^\circ) =$ $= \operatorname{tg}15^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + 335\cdot 180^\circ) = \operatorname{tg}15^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}(165^\circ + 334\cdot 180^\circ)\cdot \operatorname{tg}(15^\circ +$ $+335\cdot 180^\circ)\cdot \operatorname{tg}(45^\circ + 335\cdot 180^\circ) = (-1)^{334}\cdot \operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}45^\circ = 2-\sqrt{3}$.

Вариант 4

B1 Ответ: 28. **Указание.** См. решение B1 вар. 3.

B2 Ответ: 0.

Решение. $f\left(\frac{\pi}{2}+6\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+6\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{tg}2\left(\frac{\pi}{2}+6\pi\right)=$

$=\sin 7\pi+\mathrm{tg}13\pi=0.$

B3 Ответ: –2,5. **Указание.** Возведите в квадрат. Проверка обязательна.

B4 Ответ: 600.

Решение. Опустим из вершины B высоту BK на основание AD. Очевидно, $BCKD$ — квадрат, а треугольник ABK — прямоугольный равнобедренный, так как $\angle BAD=45^\circ$. Значит, $AK=BK=CD=$ $=BC=DK$ т. е. K — середина основания AD. Следовательно, $AK=BK=20$, поэтому площадь трапеции $S=\frac{1}{2}\cdot BK\cdot(AD+BC)=$

$=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot(40+20)=600.$

B5 Ответ: –172. **Указание.** См. решение B5 вар. 3.

B6 Ответ: 12. **Указание.** См. решение B6 вар. 1.

B7 Ответ: 9. **Указание.** Воспользуйтесь основным логарифмическим тождеством.

B8 Ответ: 5. **Указание.** См. решение B8 вар. 3.

B9 Ответ: 12.

B10 Ответ: 0,5. **Указание.** См. решение задачи B10 вар. 3. В данном случае благоприятных исходов два: ГЦ и ЦГ.

B11 Ответ: 4.

Решение. Объём куба равен $V=a^3=\frac{48}{\pi}$, где a — сторона куба. Следовательно, $a=\sqrt[3]{\frac{48}{\pi}}=2\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$. Высота конуса $h=a=2\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$,

радиус основания конуса $r=\frac{a}{2}=\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$. Как известно, объём конуса

$V_K=\frac{1}{3}h\cdot\pi r^2=\frac{1}{3}\pi\frac{a^3}{4}=\frac{48}{12}=4.$

B12 Ответ: 3.

Решение. Подставив в формулу $A=2$ и $\omega_0=3$, получим уравнение относительно Ω^2: $2=\frac{24}{\sqrt{(9-\Omega^2)^2+16\Omega^2}}$, которое легко преобразуется в биквадратное уравнение $\Omega^4-2\Omega^2-63=0$, откуда $\Omega^2=9$, учитывая, что $\Omega>0$, находим $\Omega=3$.

B13 Ответ: 14.

Решение. Пусть x — число рабочих в бригаде, y — число часов работы каждого рабочего в день. Объём работы всей бригады за один рабочий день будем считать как $x\cdot y$ (производительность каждого рабочего одна и та же). По условию объём всей работы V бригада выполняет за 20 дней. С учётом всех условий задачи получаем систему уравнений: $\begin{cases}20xy=V;\\16(x+1)(y+1)=V;\\10(x+7)(y+2)=V,\end{cases}$ из которой следует система вида $\begin{cases}xy=4x+4y+4;\\xy=2x+7y+14.\end{cases}$

Решая её, найдём $y=6$ и $x=14$.

B14 Ответ: –4. **Указание.** См. решение B14 вар. 3.

C1 Ответ: $x_1=-1$; $x_{2,3}=\pm2$. **Указание.** См. решение C1 вар. 3.

Решение. Применим к решению данного уравнения следующий метод. Из условия $g(2x-3)=4x^2-6x-1$ найдём зависимость $g(x)$. Представим $g(2x-3)$ в виде $g(2x-3)=a(2x-3)^2+$ $+b(2x-3)+c=a(4x^2-12x+9)+b(2x-3)+c$ и приравняем заданному многочлену второй степени, а именно $a\left(4x^2-12x+9\right)+$ $+b\left(2x-3\right)+c=4x^2-6x-1$. Коэффициенты a, b, c найдём из условия равенства коэффициентов при одинаковых степенях x слева и справа: $\begin{cases}4a=4;\\-12a+2b=-6;\\9a-3b+c=-1.\end{cases}$

Откуда следует, что $a=1$, $b=3$, $c=-1$ и $g(x)$ имеет вид $g(x)=x^2+$ $+3x-1$. Тогда уравнение принимает вид $x^2+3x-1=7x-x^3+3$ или $x^3+x^2-4x-4=0$, $(x+1)(x^2-4)=0$. Откуда $x_1=-1$; $x_{2,3}=\pm 2$.

C2 Ответ: 60°.

Решение.

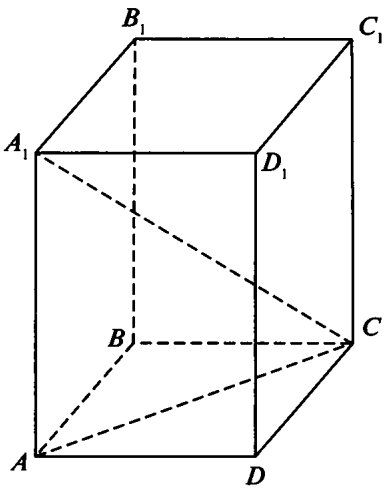

Рис. C2.4

Угол между A_1C и C_1D_1 равен углу между A_1C и CD, так как C_1D_1 и CD параллельны (см. рис. C2.4). Рассмотрим треугольник A_1CD. Угол A_1DC — прямой, так как CD перпендикулярна плоскости A_1D_1DA, значит, $\angle A_1CD=\operatorname{arctg}\frac{A_1D}{DC}$.

Поскольку $\angle A_1CA=45°$, получаем $AA_1=AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $A_1D=\sqrt{AD^2+AA_1^2}=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$, значит, $\angle A_1CD=\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{2}=$ $=\operatorname{arctg}\sqrt{3}$, следовательно, $\angle A_1CD=60°$.

C3 Ответ: $[-6;-5]\cup[-3;-2]$. **Указание.** Введите обозначения $t=\sqrt{6+x}$, $v=\sqrt{-x-2}$.

Решение. Данное неравенство определено на множестве $\begin{cases}6+x\geqslant 0;\\-x-2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow -6\leqslant x\leqslant -2$. Введём новые переменные: $\sqrt{6+x}=t\geqslant 0$, $\sqrt{-x-2}=v\geqslant 0$ и перепишем неравенство в виде

$t+v \geqslant 1+tv \Leftrightarrow t(1-v)+v-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (v-1)(t-1) \leqslant 0$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем: 1) $\begin{cases} 0 \leqslant v \leqslant 1; \\ t \geqslant 1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} v \geqslant 1; \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

Возвращаясь к переменной x, получим

1) $\begin{cases} \sqrt{-x-2} \leqslant 1; \\ \sqrt{6+x} \geqslant 1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{-x-2} \geqslant 1; \\ \sqrt{6+x} \leqslant 1. \end{cases}$

Решением первой системы является промежуток $[-3;-2]$, решением второй — промежуток $[-6;-5]$.

C4 Ответ: 2100.

Решение.

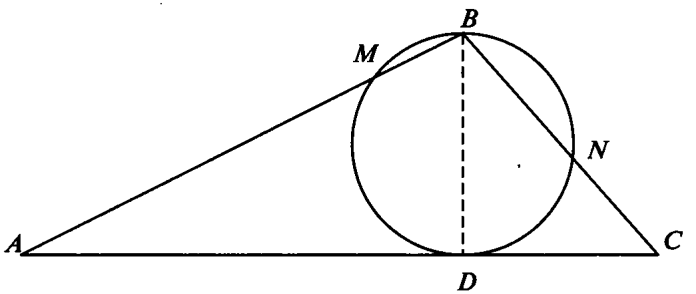

Рис. C4.4.

Используя теорему о секущей и касательной к окружности, проведённых из одной точки, лежащей вне окружности, найдём длину отрезка CD (см. рис. C4.4):

$CD^2 = BC \cdot CN = (BN+CN)CN = (32+18)\cdot 18 = 50\cdot 18 = 900$, откуда $CD = 30$.

Используя теорему Пифагора, найдём BD:

$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$. Площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC$. Для того чтобы найти длину стороны AC, необходимо вычислить длину отрезка AD. Введём следующие обозначения: $x = AD$, $y = AM$. Тогда согласно известной теореме о касательной к окружности $AD^2 = AM \cdot AB$ или $x^2 = y\left(y + \frac{320}{17}\right)$ (1)

По теореме Пифагора $\left(y+\frac{320}{17}\right)^2=x^2+40^2$ (2)

Объединив уравнения (1) и (2) в систему, найдём $x = AD$:

$$\begin{cases} x^2=y^2+\frac{320}{17}y; \\ x^2=y^2+2\cdot\frac{320}{17}y+\frac{320^2}{17^2}-40^2, \end{cases}$$ отсюда $\frac{320}{17}y=40^2-\frac{320^2}{17^2}$, или

$$y=\frac{17}{320}\cdot\frac{17^2\cdot 40^2-320^2}{17^2}=\frac{40^2(17^2-8^2)}{320\cdot 17}=\frac{5\cdot 9\cdot 25}{17}=\frac{1125}{17},$$

$$x=\sqrt{y^2+\frac{320}{17}y}=\sqrt{\frac{1125}{17}\cdot\frac{1125+320}{17}}=\frac{1}{17}\sqrt{5^3\cdot 3^2\cdot 1445}=\frac{15}{17}\sqrt{5^2\cdot 289}=$$

$$=\frac{15\cdot 5\cdot 17}{17}=75.$$

Таким образом, $AC=75+30=105$; $S=\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 105=20\cdot 105=2100$.

C5 Ответ: Если $a>1$, то $x\geqslant\log_a(2+\sqrt{4+a^2})$; если $0<a<1$, то $\log_a(2+\sqrt{4+a^2})\leqslant x<\log_a 4$.

Решение. Неравенство определено, если $a>0$, $a\neq 1$ и $1-4a^{-x}>0$. Если $a>1$, то из неравенства $1-4a^{-x}>0$ следует, что $x>\log_a 4$.

В этом случае исходное неравенство можно преобразовать к виду $a^{2(1-x)}\leqslant 1-4a^{-x}\Leftrightarrow a^{2x}-4a^x-a^2\geqslant 0$ и $a^x\geqslant 2+\sqrt{4+a^2}$. Откуда следует, что $x\geqslant\log_a(2+\sqrt{4+a^2})>\log_a 4$. Если $0<a<1$, то из неравенства $1-4a^{-x}>0$ следует, что $x<\log_a 4$. В этом случае решение исходного неравенства сводится к решению $a^{2(1-x)}\geqslant 1-4a^{-x}\Leftrightarrow a^{2x}-4a^x-a^2\leqslant 0$ и $0<a^x\leqslant 2+\sqrt{4+a^2}$.

Отсюда $x\geqslant\log_a(2+\sqrt{4+a^2})$, и с учётом $x<\log_a 4$ получим $\log_a(2+\sqrt{4+a^2})\leqslant x<\log_a 4$.

C6 Ответ: $2+\sqrt{3}$. **Указание.** См. решение C6 вар. 3.

Вариант 5

B1 Ответ: 5832.

Решение. К концу первого года сумма вклада в 5000 руб. увеличилась на $5000 \cdot 0{,}08 = 400$ руб. и стала 5400 руб. К концу второго года сумма вклада увеличилась на $5400 \cdot 0{,}08 = 432$ руб. и стала 5832 руб.

B2 Ответ: 7.

Решение. $f(g(x)) = 3g(x) + 4 = 3(2x-1) + 4 = 6x - 3 + 4 = 6x + 1 = ax + b$, следовательно, $a = 6$, $b = 1$, $a + b = 7$.

B3 Ответ: 26. **Указание.** Используйте свойства логарифмов. Сделайте проверку.

B4 Ответ: 200. **Указание.** См. решение B4 вар. 3.

B5 Ответ: 750. **Указание.** Используйте тот факт, что заданные целые числа образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 15$. См. пример 4.2.6.*

B6 Ответ: 12. **Указание.** Поскольку ординаты точек A и C равны, а длина AC равна $7 - 1 = 6$, высоты треугольников ABC и ACD равны соответственно 6 и 2. Площадь четырёхугольника $ABCD$ равна разности площадей треугольников ABC и ACD, т. е. $18 - 6 = 12$.

B7 Ответ: 4,8. **Указание.** Воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством.

B8 Ответ: 6.

Решение. Угловой коэффициент касательной k равен значению производной в точке касания: $k = f'(x)$, где $f(x) = \frac{x}{2}(4 - x)$, $x_0 = 4$. Поскольку $f'(x) = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)' = 2 - x$, $k = f'(4) = 2 - 4 = -2$. Подставив в уравнение касательной $y = kx + b$, значения $k = -2$, $x = 4$, $y = 0$, найдём $b = 0 + 2 \cdot 4 = 8$, значит, $k + b = -2 + 8 = 6$.

B9 Ответ: 864.

Решение. Полная поверхность куба $S=6a^2$, где a — длина ребра куба. Высота h пирамиды равна a. Длину стороны основания пирамиды KL можно найти по теореме Пифагора: $KL=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, значит, объём пирамиды $V=\frac{1}{3}h\cdot S_{\text{осн.}}=$ $=\frac{1}{3}a\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^3}{6}=288$, отсюда $a^3=6\cdot 288$. Следовательно, $a=12$ и $S=6\cdot 12^2=864$.

B10 Ответ: 0,4. **Указание.** См. решение задачи B10 вар. 1. В данном случае благоприятных исходов два: выбран отрезок длиной 10 см или 12 см.

B11 Ответ: 12.

B12 Ответ: 4.

Решение. Найдём точку максимума функции $f(x)$. $f'(x)=4-2x=0\Rightarrow x_0=2$. Анализируя поведение производной $f'(x)$ при переходе через эту точку, убеждаемся, что она является точкой максимума. Вычислим значение $y_0=f(x_0)=1+4\cdot 2-2^2=5$. Подставив найденные значения в уравнение прямой $y=kx-3$, найдём k: $k=\frac{1}{x}(y+3)=\frac{1}{2}(5+3)=4$.

B13 Ответ: 18.

Решение. Пусть S км — расстояние от А до В, x км/ч — скорость туриста из пункта А, y км/ч — скорость туриста из пункта В. Если t — время их первой встречи, то $tx+ty=S$ и $t=\frac{S}{x+y}$. До первой встречи турист из пункта А прошёл $S-8$ км, а турист из пункта В 8 км. Следовательно, $\frac{S-8}{x}=\frac{8}{y}$. До момента второй встречи турист из пункта А преодолел в общей сложности $2S-6$ км, а турист из пункта В $S+6$ км. Следовательно, $\frac{2S-6}{x}=\frac{S+6}{y}$. Тогда $\frac{S-8}{8}=\frac{2S-6}{S+6}$. Откуда $S=18$ км.

B14 Ответ: 9.

Решение. На отрезке $[-4;-2]$ $x-3<0$, поэтому $|x-3|=3-x$ и функция имеет вид $f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x$. Находим критические точки функции: $f'(x)=x^2+2x-3=0$ и $x_1=2$, $x_2=-3\in[-4;-2]$. Значения функции в точках $x=-4$, $x=-3$, $x=-2$: $f(-4)=6\frac{2}{3}$, $f(-3)=9$, $f(-2)=7\frac{1}{3}$. Следовательно, $f_{\text{наиб.}}=9$.

C1 Ответ: $x=\log_2(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2}$.

Решение. Поскольку $1-2^{x+2}+2^{2(x+1)}=(1-2^{x+1})^2$, уравнение преобразуется к виду $2^{2x+1}=2^{x+1}+|1-2^{x+1}|$. Введём новую переменную $t=2^x>0$ и перепишем уравнение через t: $2t^2=2t+|1-2t|$. Пусть $0<t\leqslant\frac{1}{2}$. Тогда $2t^2=2t+1-2t$ или $2t^2=1$ и $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Это значение не принадлежит множеству $\left(0;\frac{1}{2}\right]$, следовательно, не является решением. Пусть $t>\frac{1}{2}$. Тогда $2t^2=2t+2t-1$ или $2t^2-4t+1=0$ и $t_{1,2}=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, $t=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Возвращаясь к переменной x, получим $2^x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x=\log_2\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}=\log_2(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2}$.

C2 Ответ: 64 500 π.

Решение. Рассмотрим сечение шаров плоскостью, проходящей через центры шаров и точку касания (см. рис. C2.5).

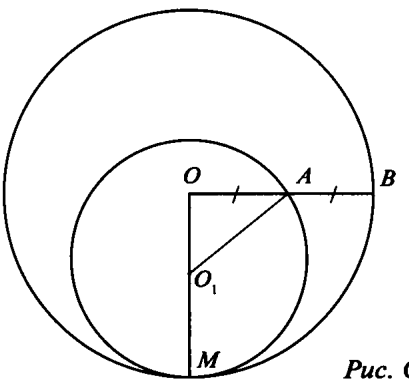

Рис. C2.5

Радиус OB большего шара делится точкой A пополам. Обозначим радиус меньшего шара через r, тогда

$$O_1M = r,\ OO_1 = 40 - r,\ OA = \frac{OB}{2} = 20,\ O_1A = r.$$

По теореме Пифагора $O_1A^2 = O_1O^2 + OA^2$, т. е. $r^2 = (40 - r)^2 + 400$, значит, $r = \frac{1600 + 400}{80} = 25$, а разность объёмов шаров равна $\frac{4}{3}\pi(40^3 - 25^3) = 64\,500\,\pi$.

C3 Ответ: $\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; +\infty\right)$.

Решение. Найдём область определения неравенства $\begin{cases} x + \frac{1}{x^2} \geqslant 0, \\ x - \frac{1}{x^2} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3+1}{x^2} \geqslant 0, \\ \frac{x^3-1}{x^2} \geqslant 0, \end{cases}$ $x^3 - 1 \geqslant 0$ и $x \geqslant 1$. Следовательно, данное неравенство определено при $x \geqslant 1$. Преобразуем исходное неравенство с учётом области определения. $\sqrt{\frac{x^3+1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^3-1}{x^2}} > \frac{2}{x}$ или $\frac{\sqrt{x^3+1}}{x} + \frac{\sqrt{x^3-1}}{x} > \frac{2}{x}$. Умножим на $x > 0$ и получим $\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3-1} > 2$. Домножив на сопряжённое выражение обе части неравенства, получим $x^3 + 1 - (x^3 - 1) > 2(\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1})$ или $\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3-1} - \sqrt{x^3+1} > -1$. Рассматривая систему вида $\begin{cases} \sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3-1} > 2, \\ \sqrt{x^3-1} - \sqrt{x^3+1} > -1, \end{cases}$ получим путём сложения неравенств неравенство вида $\sqrt{x^3-1} > \frac{1}{2}$. Откуда следует, что $x > \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.

C4 Ответ: 10.

Решение.

Из точки B опустим перпендикуляр BE на диаметр AD (см. рис. C4.5). Очевидно, что треугольники AOP и ABE подобны. Из условия следует, что $BN = NC$ и $ON = OQ - NQ = 10 - 2 = 8$.

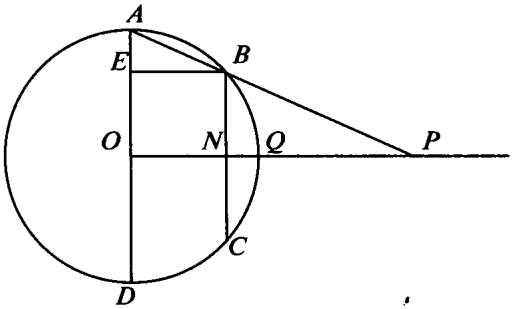

Рис. С4.5.

По теореме Пифагора $BN=\sqrt{OB^2-ON^2}=\sqrt{100-64}=6$. Поскольку $BNOE$ — прямоугольник, $EO=BN=6$, $BE=ON=8$, $AE=OA-EO=10-6=4$.

Из подобия треугольников AOP и ABE следует, что $\frac{PO}{BE}=\frac{OA}{AE}$. Тогда $PO=\frac{OA\cdot BE}{AE}=\frac{10\cdot 8}{4}=20$, $PQ=PO-OQ=$ $=20-10=10$.

C5 Ответ: Если $-4\leqslant p\leqslant -3$, то

$$x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{1-p}}+(-1)^k\arcsin\sqrt{-3-p}+\pi k,\ k\in Z;$$

если $p>-3$ и $p<-4$, то решения нет.

Решение. Найдём все значения p, при которых данное уравнение имеет решение. Область допустимых значений параметра p определяется из решения системы $\begin{cases}1-p\geqslant 0,\\ p^2+p-6\geqslant 0.\end{cases}$ Откуда следует, что $p\leqslant -3$. Данное тригонометрическое уравнение приводится к виду $a\sin x+b\cos x=c$ и решается методом введения вспомогательного угла φ (см. пример 6.3.2*.). Разделив обе части уравнения на $\sqrt{(\sqrt{1-p})^2+1}=\sqrt{2-p}$, получим $\frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{2-p}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2-p}}\cos x=$ $=\sqrt{\frac{p^2+p-6}{2-p}}$. Это уравнение имеет решение, если $\sqrt{\frac{p^2+p-6}{2-p}}=$ $=\sqrt{-3-p}\leqslant 1$ или с учётом ОДЗ для p получаем $-4\leqslant p\leqslant -3$.

Вводим вспомогательный угол φ из условий: $\cos\varphi=\sqrt{\frac{1-p}{2-p}}$,

$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2-p}}$ или $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-p}}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{1-p}}$. Запишем уравнение в виде $\cos\varphi\cdot\sin x-\sin\varphi\cdot\cos x=\sqrt{-3-p}$. Тогда $\sin(x-\varphi)=\sqrt{-3-p}$ и $x-\varphi=(-1)^k\arcsin\sqrt{-3-p}+\pi k,\ k\in Z$, или $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{1-p}}+(-1)^k\arcsin\sqrt{-3-p}+\pi k,\ k\in Z$.

C6 Ответ: $\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **Указание.** См. решение C6 вар. 3. При этом необходимо учесть, что $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Решение. Аналогично $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$,

$\sin 105^\circ=\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$, $\sin 135^\circ=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin 165^\circ=\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$, $\sin 195^\circ=-\sin 15^\circ=-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$,

$\sin 225^\circ=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 255^\circ=-\sin 75^\circ=-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$,

$\sin 285^\circ=-\sin 75^\circ=-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$, $\sin 315^\circ=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sin 345^\circ=-\sin 15^\circ=-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

Таким образом, вычислены значения $G(n)$ для аргументов, принадлежащих периоду $[0;360^o]$, где $n\in\{0,\ldots,11\}$. Вычислив сумму $\sin 15^\circ+\sin 45^\circ+\ldots+\sin 345^\circ=0$, получаем, что при любом натуральном K $G(11+12K)=0$. Число 2011 можно представить в виде $2011=11+12\cdot 166+8$. Тогда, используя определение $G(n)$, запишем

$G(2011)=G(11+12\cdot 166)+\sin(15^\circ+2004\cdot 30^\circ)+\sin(45^\circ+2004\cdot 30^\circ)+\ldots$
$+\sin(225^\circ+2004\cdot 30^\circ)=0+\sin(15^\circ+167\cdot 360^\circ)+\ldots$

$+\sin(225^\circ+167\cdot 360^\circ)=\sin 15^\circ+\sin 45^\circ+\ldots+\sin 225^\circ=\frac{3\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.

Вариант 6

B1 Ответ: 31,6.

Решение. После первого понижения себестоимость продукции составила 95% от первоначальной; после второго понижения она составила 95 · 0,9 = 85,5% от первоначальной; после третьего понижения — 85,5 · 0,8 = 68,4%. Следовательно, первоначальная себестоимость понижена на 31,6%.

B2 Ответ: 4.

Решение. $f(g(x))=\frac{2}{g(x)-3}=\frac{2}{3x+1-3}=\frac{2}{3x-2}=\frac{a}{bx+c}$ значит, $a=2$, $b=3$, $c=-2$, тогда $a\cdot b+c=2\cdot 3-2=4$.

B3 Ответ: 5. **Указание.** Представьте $0=\log_8 1$. Сделайте проверку.

B4 Ответ: 50.

Решение. Как известно, $\operatorname{tg}\angle BAC=\frac{BD}{AD}$, значит, $BD=AD\cdot\operatorname{tg}\angle BAC=0{,}5\cdot AD=0{,}5\cdot 10=5$. Площадь треугольника ABC определяется по формуле $S=\frac{1}{2}BD\cdot AC=\frac{1}{2}5(AD+DC)=$ $=\frac{5}{2}(10+10)=50$.

B5 Ответ: 98. **Указание.** Представьте число m в виде $m=6l+2$ и $m=5n+3$. См. пример 1.2.7*.

B6 Ответ: 40. **Указание.** $ABCD$ — трапеция.

B7 Ответ: 2,8. **Указание.** Воспользуйтесь формулами двойного аргумента.

B8 Ответ: −15.

Решение. Поскольку указанная касательная параллельна прямой $y=-2x$, $k=-2$. Известно, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ равен значению производной $f'(x_0)$ в точке касания x_0. В данной задаче $f(x)=2x^2+6x-5$. Таким образом, $k=f'(x_0)=4x_0+6=-2$, отсюда $x_0=-2$, следова-

тельно, $y_0 = f(x_0) = 2\cdot(-2)^2 + 6\cdot(-2) - 5 = -9$. Подставив координаты точки касания и значение $k = -2$ в уравнение касательной $y = kx + b$, найдём значение b: $b = y_0 - kx_0 = -9 + 2(-2) = -13$, $b + k = -2 - 13 = -15$.

B9 Ответ: 10. **Указание.** См. решение задачи B9 вар. 1. При этом следует учесть, что поскольку аппликаты вершин A, B и C равны нулю, то высота пирамиды равна аппликате вершины S.

B10 Ответ: 0,4. **Указание.** См. решение задачи B10 вар. 5.

B11 Ответ: 125.

Решение. Из условия следует, что высота меньшего конуса h равна половине высоты большего конуса, т. е. $h = \frac{OS}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{30}{\pi} = \frac{15}{\pi}$, а радиус основания меньшего равен половине радиуса R основания большего конуса: $r = \frac{R}{2}$. Зная объём V и высоту H большего конуса, можно найти радиус R его основания. Действительно, $V = \frac{1}{3}H\pi R^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{30}{\pi}\cdot\pi R^2 = 10R^2 = 1000$, отсюда $R = 10$, следовательно, $r = 5$ и $V_м = \frac{1}{3}\cdot h\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{15}{\pi}\pi\cdot 25 = 125$.

B12 Ответ: –3. **Указание.** См. решение B12 вар. 5.

B13 Ответ: 234.

Решение. Представим число в виде $a_0a_1a_2 = a_0\cdot 100 + a_1\cdot 10 + a_2$, где a_0, a_1, a_2 — цифры, причём $a_0 \neq 0$. По условию это число больше 200 и меньше 300. Следовательно, $a_0 = 2$. Кроме того, $a_0 + a_1 + a_2 = 9$, а с учётом того, что $a_0 = 2$, $a_1 + a_2 = 7$. Само число $\overline{a_0a_1a_2}$ равно $\frac{13}{24}\overline{a_2a_1a_0}$ или $a_0\cdot 100 + a_1\cdot 10 + a_2 = \frac{13}{24}(a_2\cdot 100 + a_1\cdot 10 + a_2)$ или $110\cdot a_1 = 1276\cdot a_2 - 4774$. Так как в левой части равенства число оканчивается нулём, то $a_2 = 4$. Тогда $a_1 = 3$ и число равно 234.

B14 Ответ: 0. **Указание.** См. решение задачи B14 вар. 5.

C1 Ответ: $\frac{3}{16}$. **Указание.** См. пример 7.3.6*.

Решение. Найдём ОДЗ для данного уравнения $\begin{cases} 20x^2-9x+1>0; \\ 1-4x>0, 1-4x\neq 1; \\ 16x^2-8x+1>0; \\ 1-5x>0, 1-5x\neq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<\frac{1}{5}; \\ x\neq 0. \end{cases}$

С учётом ОДЗ преобразуем исходное уравнение к виду $\log_{1-4x}(1-4x)(1-5x)-\log_{1-5x}(1-4x)^2=2$ или $\log_{1-4x}(1-5x)-$ $-2\log_{1-5x}(1-4x)=1$. Введём новую переменную $y=\log_{1-4x}(1-5x)$ и перепишем уравнение через y: или $y^2-y-2=0$. Откуда следует, что $y_1=-1$, $y_2=2$. Возвращаясь к переменной x, получим:

1) $\log_{1-4x}(1-5x)=-1$ или $1-5x=\frac{1}{4x}$, $(1-5x)(1-4x)=1$. Откуда следует, что $x_1=0$, $x_2=\frac{9}{20}$. Оба значения не входят в ОДЗ.

2) $\log_{1-4x}(1-5x)=2$ или $(1-4x)^2=1-5x$, $16x^2-3x=0$ и $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{16}$. $x_1=0$ не входит в ОДЗ, а $x_2=\frac{3}{16}$ удовлетворяет ОДЗ и является решением уравнения.

C2 Ответ: 3.

Решение. Обозначим через O точку пересечения медиан основания пирамиды (см. рис. C2.6).

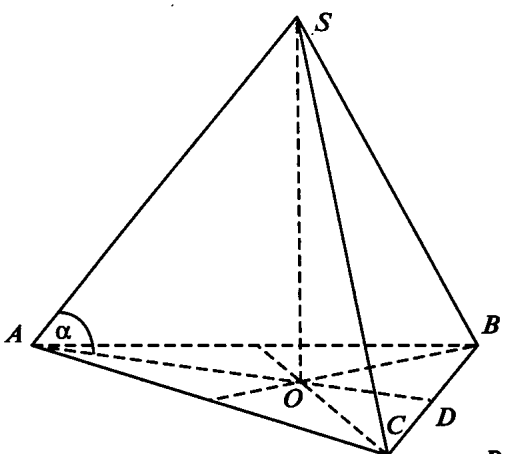

Рис. C2.6

Из условия следует, что $\angle SAO = \alpha = \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$. Пусть AD — медиана треугольника ABC, проведённая к стороне BC, a — длина стороны основания пирамиды, т.е. $AB = AC = BC = a$, тогда

$$AO = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SO = AO\cdot\operatorname{tg}\angle SAO = \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{tg}(\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}) =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{10-9}} = a\sqrt{3}.$$

Площадь основания $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, значит, объём пирамиды $V = \frac{1}{3}SO\cdot S = \frac{1}{3}\cdot a\sqrt{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4} = 2\sqrt[4]{27}$. Тогда $a = \sqrt[3]{8\sqrt[4]{27}} = 2\sqrt[4]{3}$ и $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{4} = 3$.

C3 Ответ: $\left[\frac{1}{3}; \frac{21-3\sqrt{41}}{2}\right]$. **Указание.** См. решение C3 вар. 4.

Решение. Данное неравенство определено на множестве $\begin{cases} x+2 \geqslant 0; \\ 3x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{3}$. Введём новые переменные $\sqrt{x+2} = y \geqslant 0$, $\sqrt{3x-1} = z \geqslant 0$. Тогда $x = y^2 - 2$, $3x = z^2 + 1$ и $2x = \frac{z^2+y^2-1}{2}$, и неравенство принимает вид $yz \leqslant 1 - \frac{z^2+y^2-1}{2} + y + z \Leftrightarrow z^2 + y^2 + 2yz - 2(y+z) \leqslant 3 \Leftrightarrow (y+z)^2 - 2(y+z) - 3 \leqslant 0$.

Обозначим $y + z = t \geqslant 0$. Тогда $t^2 - 2t - 3 \leqslant 0$ и $0 \leqslant t \leqslant 3$, где $t = \sqrt{x+2} + \sqrt{3x-1}$. Таким образом, приходим к решению неравенства $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-1} \leqslant 3$. Возведём в квадрат это неравенство, при условии $x \leqslant 2$, ещё раз возведём в квадрат и получим неравенство $x^2 - 21x + 18 \geqslant 0$, которое решаем при условии $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2$. В результате получаем $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{21-3\sqrt{41}}{2}$.

C4 Ответ: 1.

Решение.

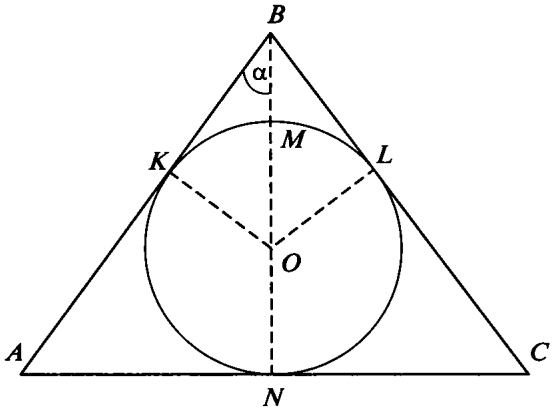

Рис. С4.6

По условию $AK = 3$, следовательно, $AN = 3$. Очевидно, что $AB = \frac{AN}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin(\arcsin 0{,}6)} = \frac{3}{0{,}6} = 5$. Пусть r — радиус окружности, тогда $\frac{r}{BK} = \frac{r}{AB - AK} = \frac{r}{2} = \operatorname{tg}(\arcsin 0{,}6) = \frac{0{,}6}{\sqrt{1-(0{,}6)^2}} = \frac{3}{4}$, значит, $r = 2 \cdot \frac{3}{4} = 1{,}5$.

Пусть M — точка пересечения высоты BN с окружностью. Очевидно, что M — ближайшая к вершине B точка окружности (см. рис. С4.6), поэтому расстояние от вершины B до окружности равно длине отрезка BM. $BM = BN - 2r = \sqrt{AB^2 - AN^2} - 2 \cdot 1{,}5 = \sqrt{25-9} - 3 = 1$.

C5 Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства.

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Тогда неравенство можно представить в виде $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \geqslant \frac{a}{2}\sin 2x \Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{a}{2}\sin 2x - 1 \leqslant 0$. Обозначим $\sin 2x = y$ и запишем неравенство через y: $3y^2 + 2ay - 4 \leqslant 0$. (1) Поскольку $\sin 2x \in [-1;1]$, исходное неравенство выполняется для всех x тог-

да и только тогда, когда неравенство (1) выполняется для любых $y \in [-1;1]$. График $f(y) = 3y^2 + 2ay - 4$ — парабола, ветви которой направлены вверх, и отрицательные значения функция $f(y)$ может принимать только между нулями, следовательно отрезок $[-1;1]$ должен принадлежать $[y_1;y_2]$, где y_1 и y_2 — нули $f(y)$. А этот факт имеет место, если $f(1) \leqslant 0$ и $f(-1) \leqslant 0$. Таким образом, если a удовлетворяет системе условий $\begin{cases} f(1) = 3 + 2a - 4; \\ f(-1) = 3 - 2a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, то исходное неравенство выполняется для всех x.

C6 Ответ: $-\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **Указание.** См. решение C6 вар. 5. При этом необходимо учесть, что

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Вариант 7

B1 Ответ: 12 000.

Решение. Пусть x — стоимость стола, y — стоимость шкафа, z — стоимость дивана. Тогда $x + y = 20\,000$, $y + z = 26\,000$, $x + y + z = 34\,000$. Из первых двух уравнений следует, что $x + 2y + z = 46\,000$, а с учётом третьего уравнения $y = 46\,000 - 34\,000 = 12\,000$.

B2 Ответ: 2. **Указание.** Воспользуйтесь определением чётной функции.

B3 Ответ: –6. **Указание.** Представьте $16 = 2^4$ и воспользуйтесь свойством монотонности показательной функции с основанием $a > 1$.

B4 Ответ: 150.

Решение. Очевидно, что треугольник BCD — прямоугольный, значит, $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$. Легко убедиться, что треугольники ABC и BCD подобны, отсюда $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{CD}$, и $AB = \frac{BC}{DC} \cdot BD = \frac{20 \cdot 12}{16} = 15$. Следовательно, площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150$.

B5 Ответ: 66.

Решение. Пусть в классе k школьников. Тогда из условий задачи количество яблок m можно представить в виде $m = 2k + 12$ и $m = 3(k - 5)$. Из равенства $2k + 12 = 3(k - 5)$ следует, что $k = 27$ и $m = 66$.

B6 Ответ: 38. **Указание.** Выполнив чертёж, легко заметить, что площадь пятиугольника $ABCDE$ равна сумме площадей трапеции $ABCE$ и треугольника CDE, которые определяются подобно тому, как это сделано в решении B6 вар. 5.

B7 Ответ: 3.

Решение. Разделив на $\cos\alpha$ числитель и знаменатель дроби ($\cos\alpha \neq 0$, в противном случае равенство не выполняется), получим уравнение для $\operatorname{tg}\alpha$: $\frac{2\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 2} = 1$. Откуда следует, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

B8 Ответ: 4.

Решение. Угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0, равен значению производной $f'(x_0)$. Следовательно, в задаче требуется найти такое значение x_0, при котором значение производной $(x^2 - 6x + 5)' = 2x - 6$ равно значению производной $(\operatorname{tg} x)'$ при $x = \frac{\pi}{4}$, т.е. выполняется равенство $2x_0 - 6 = (\operatorname{tg} x)'\,|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 2$. Отсюда $x_0 = 4$.

B9 Ответ: 16.

Решение. Пусть D — середина ребра BC, т. е. AD — медиана треугольника ABC. Значит, $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\cdot\sqrt[6]{3} = 2\sqrt[3]{9}$.

Высота пирамиды $SO = AO\cdot\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{2}{3}AD\cdot\sqrt{3} = \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{3} = 4\sqrt[6]{3}$.

Объём пирамиды находим по формуле $V = \frac{1}{3}SO\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}\cdot 4\sqrt[6]{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(4\sqrt[6]{3})^2 = 16$.

B10 Ответ: 0,8. **Указание.** См. решение задачи B10 вар. 1. При этом необходимо учесть, что в данной задаче число всех возможных исходов равно 10, а число благоприятных исходов равно 5 + 3 = 8.

B11 Ответ: 144.

B12 Ответ: 1.

Решение. Найдём значения параметров a, b, m:

$f(g(x)) = 2g(x) + b = 2(ax^2 + mx + 1) + b = 2ax^2 + 2mx + 2 + b = 2x^2 - 8x + 5$. Отсюда $2a = 2$, $2m = -8$, $2 + b = 5$, следовательно,

$a=1, a=1,\ m=-4,\ b=3,\ \ g(x)=x^2-4x+1$. Найдём точку минимума функции $g(x)$: $g'(x)=2x-4=0$. Значит, точка минимума $x_0=2$ расположена вне отрезка [4;7]. Поскольку на данном отрезке функция $g(x)$ возрастает, то наименьшее её значение на этом отрезке равно $g(4)=16-16+1=1$.

B13 Ответ: 40.

Решение. Пусть V_1 км/ч — скорость первого автомобиля, а V_2 км/ч — скорость второго автомобиля до встречи. Обозначим t — время встречи. Тогда имеет место равенство $V_1t+V_2t=300$, следовательно, $t=\frac{300}{V_1+V_2}$. После встречи первый автомобиль ехал до пункта назначения 2 ч, а второй, увеличив скорость, — 3 ч. Таким образом, имеет место равенство $2V_1+3(V_2+20)=300$. Первый автомобиль на весь путь истратил $(t+2)$ ч, т.е. $(t+2)V_1=300$, или $\frac{V_1\cdot 300}{V_1+V_2}+2V_1=300$. Заменив $V_2=80-\frac{2}{3}V_1$, получим уравнение для V_1: $V_1^2+540V_1-36\,000=0$. Откуда $V_1=\frac{-540+\sqrt{540^2+4\cdot 36000}}{2}$.

Для того чтобы извлечь корень, представим $540^2+4\cdot 36\,000$ в виде $540^2+4\cdot 36\cdot 1000=6^2\cdot 9^2\cdot 10^2+6^2\cdot 10^2\cdot 40=6^2\cdot 10^2\cdot 121$. Тогда $V_1=\frac{-540+660}{2}=60$ км/ч. $V_2=40$ км/ч.

B14 Ответ: 2. **Указание.** См. пример 8.2.8*.

Решение. Перепишем производную функции в виде $f'(x)=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)(x-4)^2$. Решая неравенство $f'(x)<0$, убеждаемся, что производная отрицательна на двух интервалах $(-3;-1)$ и $(1;3)$.

C1 Ответ: $\{-1;0\}$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение в первом уравнении системы $x^2+y^2+2xy+2(x+y)+5=(x+y)^2+2(x+y)+$ $+1+4=(x+y+1)^2+4$.

Очевидно, что $(x+y+1)^2+4\geq 4$, следовательно, $\sqrt{(x+y+1)^2+4}\geq 2$. Заметим, что $\log_2(3+\cos^2 y)\leqslant 2$ и равенство возможно только в случае $\begin{cases} x+y+1=0; \\ \cos^2 y=1. \end{cases}$

Из второго уравнения исходной системы $1-y^2>0$ или $y^2<1$. Тогда из условия $\cos^2 y=1$ следует, что $y=0$, а из уравнения $x+y=1=0$ — $x=-1$. Подставив $x=-1$, $y=0$ во второе уравнение исходной системы, убеждаемся, что оно выполняется. Значит, система имеет единственное решение $x=-1, y=0$.

C2 Ответ: -0,64.

Решение. Призма изображена на рис. C2.7.

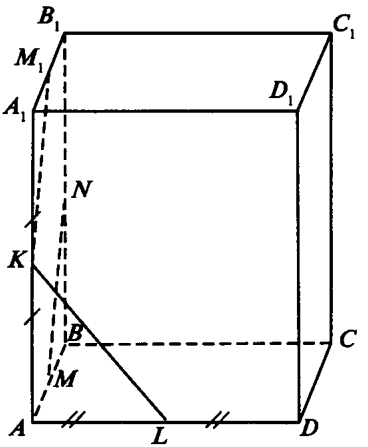

Рис.C2.7

Вычислим $KL=MN=\sqrt{AL^2+AK^2}=\sqrt{9+16}=5$. Пусть M_1 — середина A_1B_1. Поскольку $KM_1 \parallel MN$, угол α между KL и MN равен углу LKM_1, который можно найти, используя теорему косинусов: $LM_1^2=KL^2+KM_1^2-2KL\cdot KM_1\cdot\cos\alpha$, где $LM_1^2=AA_1^2+$ $+AL^2+AM^2=64+9+9=82$. Значит, $82=25+25-50\cos\alpha$, отсюда $\cos\alpha=\frac{50-82}{50}=-\frac{32}{50}=-0{,}64$.

C3 Ответ: [1;4]. **Указание.** См. решение C3 вар.1.

Решение. Обозначим $2^{\sqrt{x}} = t > 0$ и перепишем неравенство в виде $t^2 + (3x-15)t + 2(x^2 - 9x + 18) \leqslant 0$.

Найдём дискриминант квадратного трёхчлена по переменной t: $D = (3x-15)^2 - 8(x^2 - 9x + 18) = (x-9)^2$. Тогда корни квадратного трёхчлена: $t_1 = 3 - x$, $t_2 = 12 - 2x$, и неравенство принимает вид $(t - 3 + x)(t - 12 + 2x) \leqslant 0$.

Возвращаясь к переменной x, запишем исходное неравенство: $(2^{\sqrt{x}} + x - 3)(2^{\sqrt{x}} + 2x - 12) \leqslant 0$, $x \geqslant 0$. Рассмотрим функции $y_1 = 2^{\sqrt{x}} + x - 3$ и $y_2 = 2^{\sqrt{x}} + 2x - 12$. В области $x \geqslant 0$ это монотонно возрастающие функции. При $x = 1$ $y_1 = 0$. Следовательно, $y_1 < 0$ при $0 \leqslant x < 1$ и $y_1 > 0$ при $x > 1$. Функция $y_2 = 0$ при $x = 4$. Следовательно, $y_2 < 0$ при $0 \leqslant x < 4$ и $y_2 > 0$ при $x > 4$. Таким образом, на интервале (1;4) $y_1 \cdot y_2 < 0$, а значит, исходное неравенство выполняется на отрезке [1;4].

C4 Ответ: 90.

Решение.

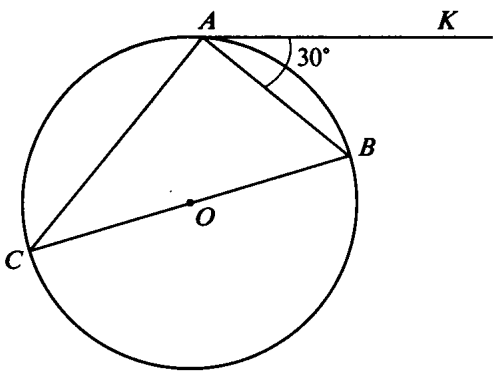

Рис.С4.7

По условию $\angle BAK = 30°$ (см. рис. С4.7). Как известно, угол, образованный касательной и хордой, равен половине угловой меры дуги, которую стягивает эта хорда, поэтому угловая мера дуги AB равна 60°. Линейная мера дуги AB равна $\frac{\pi}{3}r$, где r — радиус окружности. По условию $\frac{\pi}{3}r = 10\sqrt{3}\pi$, отсюда $r = 30\sqrt{3}$.

$\angle ACB = 30^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на дугу с угловой мерой 60°, $\angle BAC = 90^\circ$, так как BC — диаметр окружности, значит, $\angle ABC = 60^\circ$. Длину хорды AC находим, используя теорему синусов: $AC = 2r \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 30 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 90$.

C5 Ответ: Если $b > a$ и $b < \frac{a}{\sqrt{2}}$, то решений нет; если $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$, то $|x| = \frac{a}{2}$, $|y| = \frac{a}{2}$; если $b = a$, то $|x| = a$, $y = 0$, $x = 0$, $|y| = a$; если $\frac{a}{2} < b < a$, то $|x| = \frac{a + \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$, $|y| = \frac{a - \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$ и $|x| = \frac{a - \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$, $|y| = \frac{a + \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$.

Решение. Уравнения системы таковы, что если точка $(x;y)$ удовлетворяет системе, то точки $(-x;-y), (-x;y), (x;-y)$ также являются решением системы. Кроме того, из первого уравнения следует $-a \leqslant x \leqslant a$ и $-a \leqslant y \leqslant a$, а из второго уравнения $-b \leqslant x \leqslant b$, $-b \leqslant y \leqslant b$. Первое уравнение задаёт квадрат, образованный пересечением четырёх прямых: $x + y = a$, $x + y = -a$, $x - y = a$, $x - y = -a$. Второе уравнение задаёт окружность радиуса b с центром в начале координат. Зафиксируем положение квадрата (см. рис. C5.7) и исследуем положение окружности в зависимости от b (т. е. радиуса).

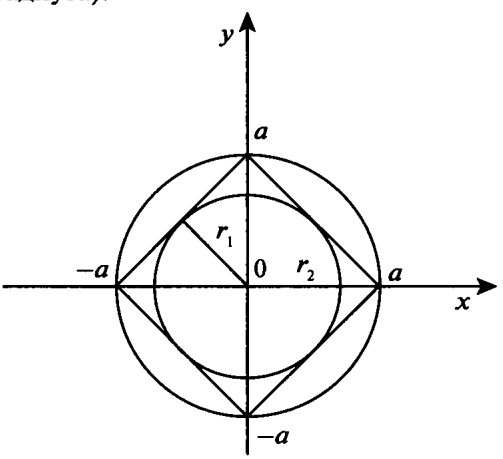

Рис. C5.7

Если радиус $r=b$ меньше радиуса $r_1=\frac{a}{\sqrt{2}}$ вписанной окружности, то окружность и квадрат не имеют общих точек, а система не имеет решения. Если $r=b=\frac{a}{\sqrt{2}}$, то система имеет четыре решения, а именно: $|x|=\frac{a}{2}$, $|y|=\frac{a}{2}$ или $\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right),\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right),\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2}\right),\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2}\right)$. Если $r=b$ больше радиуса $r_2=a$ описанной окружности, то система не имеет решения. Если $r=b=a$, то система имеет четыре решения: $(a;0),(-a;0)$, $(0;a),(0;-a)$. Если $r_1<r=b<r_2$ или $\frac{a}{\sqrt{2}}<b<a$, то окружность пересекает квадрат в восьми точках. Найдём эти точки при $x>0$, $y>0$.

$$\begin{cases} x+y=a; \\ x^2+y^2=b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\frac{a^2-b^2}{2}; \\ x+y=a. \end{cases}$$

Отсюда $x_1=\frac{a+\sqrt{2b^2-a^2}}{2}$, $y_1=\frac{a-\sqrt{2b^2-a^2}}{2}$ и $x_2=\frac{a-\sqrt{2b^2-a^2}}{2}$, $y_2=\frac{a+\sqrt{2b^2-a^2}}{2}$. Остальные шесть точек получаем из соображений симметрии.

C6 Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение.

$$F(360)=\frac{1}{2}+\cos 7^\circ+\cos 14^\circ+\ldots+\cos(360\cdot 7^\circ)=\frac{2\sin 7^\circ}{2\sin 7^\circ}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos 7^\circ+\cos 14^\circ+\ldots+\cos(360\cdot 7^\circ)\right)=\frac{1}{2\sin 7^\circ}(\sin 7^\circ+$$
$$+\sin 14^\circ+\sin 21^\circ-\sin 7^\circ+\sin 28^\circ-\sin 14^\circ+\ldots$$
$$+\sin(360\cdot 7^\circ)-\sin(358\cdot 7^\circ)+\sin(361\cdot 7^\circ)-\sin(359\cdot 7^\circ))=\frac{1}{2\sin 7^\circ}\cdot$$
$$\cdot(\sin(360\cdot 7^\circ)+\sin(361\cdot 7^\circ))=\frac{2\sin\left(\frac{7^\circ}{2}+7\cdot 360^\circ\right)\cos\frac{7^\circ}{2}}{2\sin 7^\circ}=\frac{2\sin\frac{7^\circ}{2}\cos\frac{7^\circ}{2}}{2\sin 7^\circ}=$$
$$=\frac{\sin 7^\circ}{2\sin 7^\circ}=\frac{1}{2}.$$

Вариант 8

B1 Ответ: 22 900.

Решение. Пусть x — число телевизоров, выпущенных в первый квартал. Тогда во второй квартал выпущено $x + 3200$ телевизоров, в третий — $x + 6400$, а в последний — $x + 9600$. Годовой выпуск телевизоров $x + 3600 \cdot 6 = 72\,400$ и $x = 13\,300$ штук, а в последний квартал выпуск составил $13\,300 + 9600 = 22\,900$ штук.

B2 Ответ: 5. **Указание.** Вспомните определения чётной и нечётной функций, а также определение функции общего вида.

B3 Ответ: 0. **Указание.** Представьте $\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ и воспользуйтесь свойством монотонности показательной функции с основанием $0 < a < 1$.

B4 Ответ: 24.

Решение. $BC = AB \cdot \cos\angle ABC = 10 \cdot 0{,}6 = 6$; $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

B5 Ответ: 28.

Решение. Пусть m — число мальчиков, d — число девочек в секции. По условиям задачи

$$\begin{cases} m > d; \\ 2d + m > 40; \\ 2m + d < 44. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что $0 < m - d < 4$.

Возможны три варианта: 1) $m = d + 1$; 2) $m = d + 2$; 3) $m = d + 3$.

Исследуя каждый из трёх вариантов, убеждаемся, что возможен только второй вариант. Действительно, если $m = d + 2$, то из условий $\begin{cases} 2d + m > 40; \\ 2m + d < 44 \end{cases}$ следует, что $\begin{cases} 3d > 38; \\ 3d < 40. \end{cases}$ Откуда $d = 13$ и $m = 15$.

B6 Ответ: 15. **Указание.** См. указания к заданию B6 вар. 7.

B7 Ответ: –3. **Указание.** Разделите на $\cos^2\alpha$ ($\cos\alpha \neq 0$) данное равенство.

B8 Ответ: –3.

Решение. Найдём то значение $x = x_1$, при котором $f'(x_1) = f'\left(-\frac{1}{3}\right)$, т.е. $3x^2 - 2x = 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$ или $3x^2 - 2x - 1 = 0$. Тогда $x_1 = 1$, $f(1) = 0$ и $f'(1) = 1$. Следовательно, уравнение касательной $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ принимает вид $y = x - 1$. Значит, $k = 1, b = -1$ и $-2k + b = -3$.

B9 Ответ. 36.

B10 Ответ: 0,7. **Указание.** См. решение задачи B10 вар. 1. При этом необходимо учесть, что в данной задаче число всех возможных исходов равно 20, а число благоприятных исходов равно 5 + 9 = 14.

B11 Ответ. 54.

Решение. Найдём радиус r окружности с центром в точке C по теореме Пифагора: $r = KC = \sqrt{OK^2 - OC^2} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt[6]{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{8\sqrt[6]{3}}{4}\right)^2} =$ $= \sqrt[6]{3}\cdot\sqrt{16-4} = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{3} = 2\cdot 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = 2\cdot\sqrt[3]{9}$. Площадь правильного треугольника, вписанного в окружность радиусом r, можно вычислить по формуле $S = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot(2\cdot\sqrt[3]{9})^2 = 3\cdot 3^{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}} = 9\cdot 3^{\frac{5}{6}}$. Очевидно, что высота пирамиды $AKLM$ $h = \frac{3}{4}AB = 6\sqrt[6]{3}$. Значит, объём этой пирамиды $V = \frac{1}{3}\cdot h\cdot S = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot\sqrt[6]{3}\cdot 9\cdot 3^{\frac{5}{6}} = 54$.

B12 Ответ: 2.

Решение. Введём в рассмотрение систему координат с началом в точке A, ось x которой проходит через точку B, а ось y направлена так, что ордината точки C положительна. Тогда координаты (x_1, y_1) автомобиля, который выехал из точки A, являются функциями времени t: $x_1 = 90t$, $y_1 = 0$. Аналогично координаты (x_2, y_2) второго автомобиля $x_2 = 285 - 60 \cdot \cos 60° \cdot t = 285 - 30t$, $y_2 = 30\sqrt{3}t$. Квадрат расстояния r между автомобилями $S = r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (120t - 285)^2 + 2700t^2$ достигает минимума при $S' = 0$, откуда $120(120t - 285) + 2700t = 0$. Значит, $t = \frac{285}{142,5} = 2$.

B13 Ответ: 4.

Решение. Пусть V_1 — производительность первого рабочего, V_2 — производительность второго рабочего. A — объём работы. Тогда $\frac{A}{V_1}$ — время, необходимое первому рабочему для выполнения всей работы, $\frac{A}{V_2}$ — время для второго рабочего. В соответствии с условием задачи имеет место равенство $\frac{1}{3} \cdot \frac{A}{V_2} \cdot V_1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{A}{V_1} \cdot V_2 = \frac{2}{3}A$. Откуда следует $4\frac{V_1}{V_2} + 3\frac{V_2}{V_1} = 8$. Обозначим $\frac{V_1}{V_2} = t > 1$ по условию. Тогда $4t^2 - 8t + 3 = 0$ и $t = \frac{2}{3}$. Следовательно, $V_1 = \frac{3}{2}V_2$.

По условию задачи всю работу они выполнили за 2 ч 24 мин. Тогда имеем $\frac{A}{V_1 + V_2} = \frac{12}{5}$ или $A = \frac{12}{5}(V_1 + V_2)$. Нам надо найти $\frac{A}{V_1}$. Для этого разделим последнее соотношение на V_1 и получим $\frac{A}{V_1} = \frac{12}{5}\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{12}{5}\left(1 + \frac{2}{3}\right) = 4$ ч.

B14 Ответ: 1. **Указание.** См. пример 8.2.8*.

Решение. Перепишем производную в виде $f'(x) = (x-1)^2(x+1)(x+4)^2(x-4)$. Число точек, в которых производная обращается в нуль, равно 4. Однако только при переходе через две точки $x = -1$ и $x = 4$ производная меняет знак. Причём, с «+» на «–» производная меняет знак только в точке $x = -1$. Следовательно, имеется одна точка максимума.

C1 Ответ: $\{-2;-8\}$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение первого уравнения исходной системы

$$x^2+17+\frac{16}{x^2}=\left(x^2-8+\frac{16}{x^2}\right)+25=\left(x-\frac{4}{x}\right)^2+25.$$

Очевидно, что $\left(x-\frac{4}{x}\right)^2+25\geqslant 25$ для $x\neq 0$, и следовательно, $\sqrt{\left(x-\frac{4}{x}\right)^2+25}\geqslant 5$.

Преобразуем правую часть этого же уравнения $5\cdot 2^{8xy-16x^2-y^2}=5\cdot 2^{-(4x-y)^2}$. Так как $0<2^{-(4x-y)^2}\leqslant 1$, то $5\cdot 2^{-(4x-y)^2}\leqslant 5$ и равенство возможно только в случае $\begin{cases} x-\frac{4}{x}=0; \\ 4x-y=0. \end{cases}$ Решениями этой системы являются точки $\{2;8\}$ и $\{-2;-8\}$. Проверим, выполняется ли второе уравнение исходной системы. Подставив точку $\{2;8\}$, убеждаемся в том, что $\log_2 8\neq 19$. Подставив точку $\{-2;-8\}$, убеждаемся в том, что $\log_2 8=3$. Следовательно, система имеет единственное решение $\{-2;-8\}$.

C2 Ответ: $\operatorname{arctg}3\sqrt{3}$.

Решение.

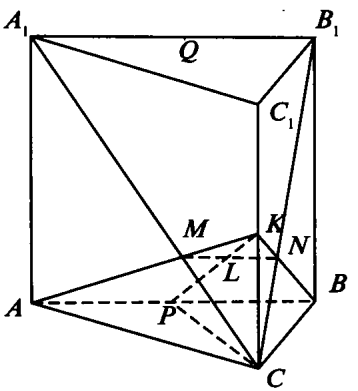

Рис. C2.8

Обозначим через M и N точки пересечения AK с A_1C и BK с B_1C соответственно (см. рис. C2.8). Пусть P и Q — середины

сторон AB и A_1B_1 соответственно. Рассмотрим сечение PQC_1C (см. рис. С2.8а), L — точка пересечения PC_1 и QC.

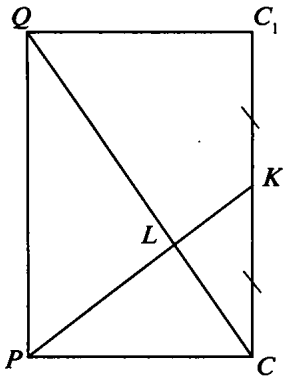

Рис.С2.8а

Легко убедиться, что искомый угол равен углу KLC, который определяется из треугольника CLK: $\operatorname{tg}\angle CKP=\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\angle LCK=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

отсюда $\operatorname{tg}\angle KLC=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{3}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$

$=\dfrac{-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$. Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}3\sqrt{3}$.

C3 Ответ: $[1;2]$, $[3;4]$. **Указание.** Провести группировку слагаемых.

Решение. Группируя слагаемые при 2^x и 2^{2x}, получим неравенство вида

$(x^2-5x+6)2^{2x}-18(x^2-5x+6)2^x+32(x^2-5x+6)\leqslant 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x^2-5x+6)(2^{2x}-18\cdot 2^x+32)\leqslant 0.$

Оно равносильно двум системам:

1) $\begin{cases} x^2-5x+6\leqslant 0; \\ 2^{2x}-18\cdot 2^x+32\geqslant 0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-5x+6\geqslant 0; \\ 2^{2x}-18\cdot 2^x+32\leqslant 0. \end{cases}$ Первая система несовместна. Решая вторую систему, получим $1\leqslant x\leqslant 2$ и $3\leqslant x\leqslant 4$.

C4 Ответ: $18\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.

Решение.

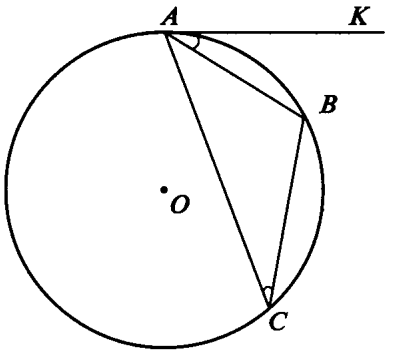

Рис. С4.8

Найдём угловую меру α дуги $\overset{\smile}{BC}$ в градусах из условия $2\pi\cdot 36\cdot\frac{\alpha}{360^\circ}=18\pi$, отсюда $\alpha=90^\circ$, значит, $\angle BAC=45^\circ$, как вписанный угол, опирающийся на дугу с угловой мерой 90°, и $\angle ACB=30^\circ$ (см. рис. С4.8). Таким образом, $\angle ABC=180^\circ-45^\circ-30^\circ=105^\circ$. Длину хорды AC находим по теореме синусов $AC=2r\cdot\sin 105^\circ=2\cdot 36\cos 15^\circ=72\cdot\cos(45^\circ-30^\circ)=$

$$=72\cdot(\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ)=72\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=18\sqrt{2}(\sqrt{3}+1).$$

C5 Ответ: Если $1\leqslant a\leqslant 7$, то $x_{1,2}=2\pm\sqrt{a-1}$, $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{7-a}$; если $a>7$, то $x_{1,2}=2\pm\sqrt{a-1}$; если $a<1$, то $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{7-a}$.

Решение. Данное уравнение есть уравнение 4-й степени относительно x, но относительно параметра a оно является квадратным: $a^2+8(x-1)a-x^4+14x^2-32x+15=0$. Откуда

$$a_{1,2}=4(1-x)\pm\sqrt{16(1-x)^2+x^4-14x^2+32x-15}=4(1-x)\pm$$
$$\pm\sqrt{x^4+2x^2+1}=4(1-x)\pm(x^2+1);\quad a_1=5+x^2-4x,\quad a_2=3-4x-x^2.$$

Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\left[\begin{array}{l}x^2-4x+5-a=0;\\ x^2+4x+a-3=0.\end{array}\right.$ Решаем каждое из них:

1) $x^2-4x+5-a=0\Rightarrow x_{1,2}=2\pm\sqrt{a-1}$, где $a\geqslant 1$.

2) $x^2+4x+a-3=0\Rightarrow x_{3,4}=-2\pm\sqrt{7-a}$, где $a\leqslant 7$.

C6 Ответ: $\frac{1}{2}$. **Указание.** См. решение С6 вар. 7.

Вариант 9

B1 Ответ: 50.

Решение. Если x — число работников в первой фирме изначально, то $x+62$ — общее число работников в двух фирмах, что составляет 100%. После увеличения числа работников в первой фирме стало на $0{,}28x$ человек больше, а во второй на 14 человек больше, что составило 25% от первоначального числа работников в обеих фирмах. По условиям задачи составим пропорцию $\frac{x+62}{0{,}28x+14}=\frac{100}{25}$. Откуда $x=50$.

B2 Ответ: 9.

Решение. Преобразуем уравнение $f(x-2)+3=0$ к виду $f(x-2)=-3$. Найдём по графику значения аргумента функции f, при котором она принимает значение, равное -3. Из графика видно, что таких значений два: 0 и 5, значит, $x_1-2=0$ и $x_2-2=5$. Откуда следует, что $x_1=2$, $x_2=2+5=7$. Таким образом, $x_1+x_2=9$.

B3 Ответ: -1. **Указание.** На ОДЗ уравнения $x+2\geq 0$ составьте совокупность вида $\left[\begin{array}{l} x+2=0; \\ x^2+2x-3=0. \end{array}\right.$

B4 Ответ: 2400. **Указание.** См. решение B4 вар. 8.

B5 Ответ: 8. **Указание.** Пусть x — число ламп в 60 Вт, y — число ламп в 100 Вт.

По условиям задачи составляется система неравенств. См. решение B5 вар. 8.

B6 Ответ: 18. **Указание.** Выполнив чертёж, легко заметить, что площадь указанного четырёхугольника можно представить суммой площадей двух треугольников, один из которых расположен выше оси Ox, другой — ниже, площади которых просто определить: 12 и 6.

B7 Ответ: -1. **Указание.** Перейти к основанию 2 во внутреннем логарифме и воспользоваться свойствами логарифма (см. пример 7.1.2*).

B8 Ответ: 8.

Решение. Запишем уравнение касательной в виде $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$, где $f(x) = -x^2 + 6x - 8$, $x_0 = 4$, $f(x_0) = -16 + 24 - 8 = 0$; $f'(x_0) = -2\cdot 4 + 6 = -2$. Таким образом, уравнение касательной можно записать в виде $y = -2(x - 4)$. Подставив $x = 0$, найдём требуемую величину $y_0 = 8$.

B9 Ответ: 40. **Указание.** См. решение задачи B9 вар. 1.

B10 Ответ: 0,0833. **Указание.** См. решение задачи B10 вар. 1. При этом необходимо учесть, что в данной задаче число всех возможных исходов равно 36, а число благоприятных исходов равно 3: 1 + 3, 2 + 2 и 3 + 1. Таким образом,

$$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{0{,}25}{3} = 0{,}08333... \approx 0{,}0833.$$

B11 Ответ: 48.

Решение. Радиус r окружности, описанной около квадрата $KLMN$, найдём по теореме Пифагора: $r = CK = \sqrt{OK^2 - OC^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{4}\right)^2} = 2\sqrt{3}$. Вычислим длину стороны квадрата $KLMN$: $KL = r\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$, отсюда площадь квадрата: $S = (KL)^2 = 4\cdot 6 = 24$. Очевидно, что высота пирамиды:

$AC = \frac{3}{4}AB = \frac{3}{4}\cdot 8 = 6$. Таким образом, объём пирамиды:

$V = \frac{1}{3}AC\cdot S = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot 24 = 48.$

B12 Ответ: 42.

Решение. Выразим y из уравнения $3x + y = 6$ и подставим полученное выражение в формулу, определяющую значение P:

$P = -3x^2 + (x-2)y + 48 = -3x^2 + (x-2)(6-3x) + 48 = -6(x^2 - 2x + 6).$

Найдём точку максимума x_0 функции $P(x)$: $P'(x) = -12(x-1) = 0$, откуда $x_0 = 1$, $y_0 = 6 - 3x_0 = 3$, $P(x_0, y_0) = 42$.

B13 Ответ: 6.

Решение. Пусть V_1 м/с и V_2 м/с — скорости точек, причём $V_1 > V_2$. Время одного оборота первой точки $\frac{12\pi}{V_1}$ с, время оборота второй точки $\frac{12\pi}{V_2}$ с. По условию задачи $\frac{12\pi}{V_2} - \frac{12\pi}{V_1} = 6{,}28$. Из второго условия задачи следует, что за 12,56 с первая точка пройдёт по окружности путь на 12π больший, чем вторая точка, т. е. $12{,}56V_1 - 12{,}56V_2 = 12\pi$. Принимая $\pi = 3{,}14$, получим систему уравнений $\begin{cases} \frac{6}{V_2} - \frac{6}{V_1} = 1; \\ V_1 - V_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_1 \cdot V_2 = 18; \\ V_1 - V_2 = 3. \end{cases}$

Отсюда находим $V_1 = 6$ м/с.

B14 Ответ: 5. **Указание.** См. пример 8.2.11*.

Решение. Если производная y' не меняет знака в области определения функции y, то функция не имеет точек экстремума. Найдём y': $y' = -x^2 + 2(a+2)x - 4$. Если $-x^2 + 2(a+2)x - 4 \leqslant 0$ для любого x или $x^2 - 2(a+2)x + 4 \geqslant 0$, то заданная функция не имеет экстремума. Квадратное неравенство выполняется, если $D = 4(a+2)^2 - 16 \leqslant 0$ или $|a+2| \leqslant 2$ и $-4 \leqslant a \leqslant 0$. Промежуток $[-4;0]$ содержит пять целых значений.

C1 Ответ: $x_1 = \arccos\frac{23}{32} + 2\pi k,\ y_1 = -\arccos\frac{3}{8} + 2\pi n;$
$x_2 = -\arccos\frac{23}{32} + 2\pi k,\ y_2 = \arccos\frac{3}{8} + 2\pi n,\ k, n \in Z.$

Решение. Перепишем систему в виде $\begin{cases} 4\cos x = 4 - 3\cos y; \\ 4\sin x = -3\sin y \end{cases}$ и возведём в квадрат каждое уравнение

$$\begin{cases} 16\cos^2 x = 16 - 24\cos y + 9\cos^2 y; \\ 16\sin^2 x = 9\sin^2 y. \end{cases}$$

В результате сложения уравнений получим $\cos y = \frac{3}{8}$ и $y = \pm\arccos\frac{3}{8} + 2\pi k,\ k \in Z$. Тогда из первого уравнения исходной

системы следует, что $\cos x = 1 - \frac{3}{4}\cos y = 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32}$ и $x = \pm\arccos\frac{23}{32} + 2\pi k$, $k \in Z$. Из второго уравнения исходной системы следует, что $\sin x$ и $\sin y$ имеют разные знаки. Таким образом, если $x_1 = \arccos\frac{23}{32} + 2\pi k$, то $y_1 = -\arccos\frac{3}{8} + 2\pi n$, $k, n \in Z$, а если $x_2 = -\arccos\frac{23}{32} + 2\pi k$, то $y_2 = \arccos\frac{3}{8} + 2\pi n$, $k, n \in Z$.

C2 Ответ: 60.

Решение. Из условия следует, что KL и MN — средние линии треугольников ABC и ASB соответственно (см. рис. C2.9), следовательно, эти отрезки параллельны и равны: $KL = MN = \frac{AB}{2} = 6$.

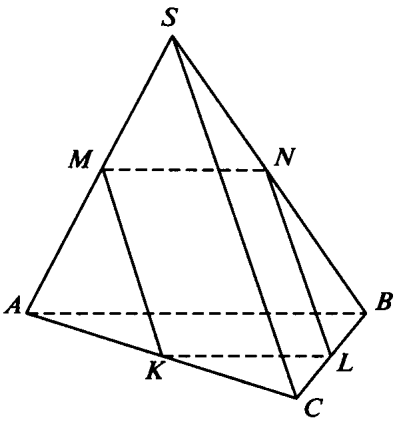

Рис. C2.9

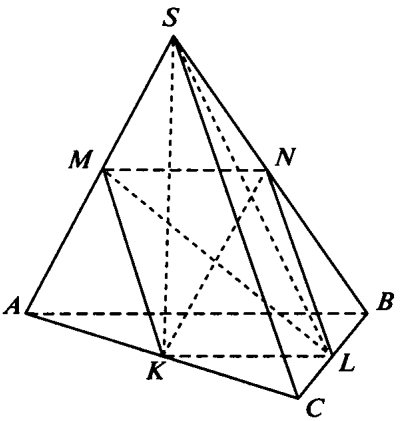

Рис. C2.9а

Аналогично $MK \parallel NL$ и $MK = NL = \frac{SC}{2} = 10$, причём $KMNL$ — параллелограмм. Легко показать, что $KMNL$ — прямоугольник. Для этого выполним дополнительные построения. Проведём в треугольнике ABC медианы AL и BK, а в треугольниках ACS и BCS — медианы SK и SL соответственно (см. рис. C2.9а). Треугольник ABC — правильный (по условию), значит, $AL = BK$, а поскольку треугольники ACS и BCS равны,

$SK=SL$. Следовательно, ΔASL и ΔBSK равны по трём сторонам. Таким образом, отрезки LM и KN равны как соответствующие медианы в равных треугольниках. Кроме того, LM и KN — диагонали параллелограмма $KLMN$. Следовательно, четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник. Тогда его площадь равна $6\cdot 10=60$.

C3 Ответ: $(-3;2]$. **Указание.** Определите множество значений левой части неравенства.

Решение. Поскольку $x^4-18x^2+82=(x^2-9)^2+1\geqslant 1$ для $\forall x$, а основание логарифма меньше 1, значит $\log_{1/2}(x^4-18x+82)\leqslant 0$ для любого x. Правая часть данного неравенства $\sqrt[4]{6-x-x^2}\geqslant 0$ на ОДЗ, т.е. на множестве значений x, для которых $6-x-x^2\geqslant 0 \Leftrightarrow x^2+x-6\leqslant 0$, т.е. $-3\leqslant x\leqslant 2$. Следовательно, неравенство выполняется на множестве $-3<x\leqslant 2$, так как при $x=-3$ выполняется равенство.

C4 Ответ: $\frac{405\sqrt{7}}{2}$.

Решение.

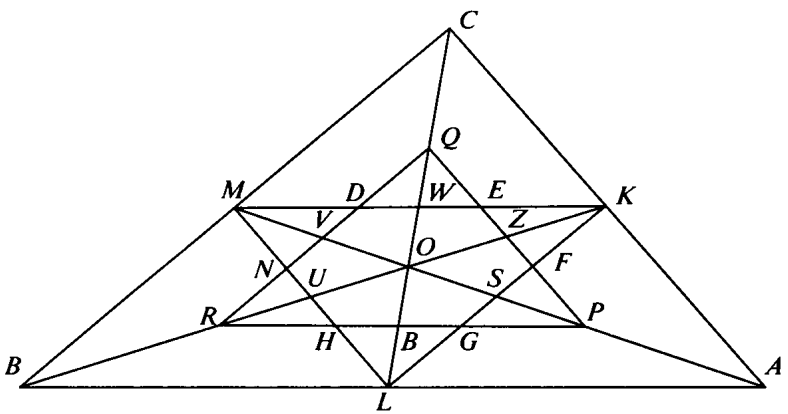

Рис. C4.9

Поскольку точки K, L, M являются серединами сторон AC, AB и BC треугольника ABC, следовательно KL, LM и MK — средние линии этого треугольника. Отсюда $KL=\frac{1}{2}BC=45$, $LM=\frac{1}{2}AC=36$, $MK=\frac{1}{2}AB=54$, кроме того, $KL\parallel BC$, $LM\parallel AC$, $MK\parallel AB$ (см. рис. C4.9). Рассматривая треуголь-

ник ABO, легко убедиться, что PR — средняя линия этого треугольника, параллельная стороне AB, значит, $PR=\frac{1}{2}AB=54$ и $PR \parallel AB$. Аналогичным образом можно установить, что $RQ=\frac{1}{2}BC=45$ и $RQ \parallel BC$, а $PQ=\frac{1}{2}AC=36$ и $PQ \parallel AC$. Следовательно, треугольники KLM и PQR равны (по трём сторонам).

Введём следующие обозначения: пусть D и E — точки пересечения отрезка MK с QR и QP; F и G — точки пересечения KL с QP и PR; H, N — точки пересечения LM с PR и PQ, S и V — точки пересечения AM с KL и PQ, T и W — точки пересечения CL с PR и KM, U и Z — точки пересечения BK с LM и QP соответственно. Общей частью треугольников KLM и PQR является шестиугольник $DEFGHN$. Поскольку отрезок $PR \parallel AB$, треугольники AOL и OPT подобны, причём, P — середина AO (по условию), а следовательно, $OT:OL=$ $=OP:OA=\frac{1}{2}$ т. е. $OT=\frac{1}{2}OL$ и $LT=\frac{1}{2}OL=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}CL=\frac{1}{6}CL$. Если PR, а значит, и $GH \parallel AB$ и $MK \parallel AB$, то треугольник GHL подобен треугольнику KLM. Аналогично треугольник GLT подобен треугольнику KLW. Поскольку $KW \parallel AL$ и $CK=KA$, WK — средняя линия треугольника KLW, значит, $LW=\frac{1}{2}CL$. Учитывая, что $LT=\frac{1}{6}CL$, делаем вывод: $LT=\frac{1}{3}LW$ и, следовательно, $LG=\frac{1}{3}LK$, отсюда коэффициент подобия треугольников GLH и KLM равен $\frac{1}{3}$, а площадь треугольника GLH равна $\frac{1}{9}$ площади треугольника KLM.

Аналогично $S_{\Delta KFE}=S_{\Delta DMN}=\frac{1}{9}S_{\Delta KLM}$.

Таким образом,
$$S_{DEFGHN}=S_{\Delta KLM}-S_{\Delta GLH}-S_{\Delta KFE}-S_{\Delta DNM}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)S_{\Delta KLM}=\left(1-\frac{1}{3}\right)S_{\Delta KLM}=\frac{2}{3}S_{\Delta KLM}.$$

Если треугольник KLM подобен треугольнику ABC и коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$, то $S_{\Delta KLM}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$. Площадь треуголь-

ника ABC можно вычислить по формуле Герона. Полупериметр треугольника ABC $p=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)=\frac{1}{2}(108+90+72)=135$, тогда $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}=\sqrt{135\cdot 27\cdot 45\cdot 63}=$ $=81\sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7}=81\cdot 15\sqrt{7}$, следовательно, $S_{DEFGHN}=\frac{2}{3}S_{\Delta KLM}=$ $=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{6}\cdot 81\cdot 15\sqrt{7}=\frac{405\sqrt{7}}{2}$.

C5 Ответ: $x=0$ для любого a.

Решение. Если $a=0$, то уравнение определено только при $x=0$. Очевидно, что $x=0$ является также корнем уравнения. Если $a\neq 0$, то $x=a$ не является его решением, следовательно, обе части уравнения можно разделить на $\sqrt[4]{(a-x)^2}$ и заменить уравнение равносильным уравнением вида $\sqrt[4]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2}+5\cdot\sqrt[4]{\frac{a+x}{a-x}}-6=0$. Введём новую переменную $t=\sqrt[4]{\frac{a+x}{a-x}}\geq 0$, тогда $t^2+5t-6=0$, откуда $t_1=1$, $t_2=-6$, но $t=-6$ не подходит по смыслу замены. Возвращаясь к переменной x, получим $\frac{a+x}{a-x}=1$ и $x=0$.

C6 Ответ: 586.

Решение. Из условия задачи следует, что требуется найти все четырёхзначные, трёхзначные и двузначные натуральные числа, удовлетворяющие указанным условиям. Среди однозначных чисел таковым является только 1. Рассмотрим множество четырёхзначных натуральных чисел. Единственная единица может располагаться на любой из четырёх позиций (4 способа). Оставшиеся три позиции можно занять оставшимися пятью цифрами (2, 3, 4, 5, 6) 5^3 способами. Действительно, на самую старшую свободную позицию можно поставить любую из пяти цифр, на следующую — также любую из пяти цифр и, наконец, на самую младшую — тоже любую из пяти цифр. При этом все полученные числа будут различными. Таким образом, различных указанных чисел $4\cdot 5^3=500$. Можно сделать вывод, что трёхзначных и двузначных чисел будет соответственно $3\cdot 5^2=75$ и $2\cdot 5=10$. Значит, всего таких чисел 500 + 75 + 10 + 1 = 586.

Вариант 10

B1 Ответ: 3249. **Указание.** См. решение B1 вар. 6.

B2 Ответ: –4.

Решение. Приведём неравенство $f(x+1)-2 \leqslant 0$ к виду $f(x+1) \leqslant 2$. По графику находим целые значения аргумента функции f, при которых эта функция принимает значения, не превосходящие 2, т. е. график функции расположен не выше прямой $y=2$. Очевидно, что это следующие значения: $-3,-2,-1,0,1,2,3,4$, поскольку аргументом функции является сумма $x+1$, то переменная x в указанных точках принимает значения $-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$ и их сумма равна -4.

B3 Ответ: –6. **Указание.** См. пример 3.3.1*.

B4 Ответ: 100.

Решение. Очевидно, что треугольник ABE — прямоугольный, значит $\cos\angle BAE = \frac{AE}{AB} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, следовательно, $\angle BAE = 45°$. Площадь параллелограмма равна $S = AD \cdot AB \cdot \sin 45° = 20 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100$.

B5 Ответ: 83. **Указание.** Представьте искомое число $\overline{xy}$ в виде $\overline{xy} = 10x + y$ и используйте условия задачи. См. пример 1.2.4*.

B6 Ответ: 12. **Указание.** См. указание к заданию B6 вар. 9.

B7 Ответ: –0,5. **Указание.** Перейти к основанию 5 во внутреннем логарифме и воспользоваться свойствами логарифма.

B8 Ответ: 2.

Решение. Если указанная касательная параллельна прямой $y=x$, то $f'(x_0)=1$, значит, уравнение этой касательной можно записать в виде $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ или $y = x-1+f(x_0)$. По-

скольку касательная проходит через точку $M_1(2;3)$, $3=2-1+f(x_0)$, откуда $f(x_0)=2$.

B9 Ответ: 15. **Указание.** Найдите высоту грани CDS.

B10 Ответ: 0,167. **Указание.** См. решение задачи B10 вар. 9. При этом необходимо учесть, что в данной задаче число всех возможных исходов равно 36, а число благоприятных исходов равно 6: $1+1$, $1+2$, $2+1$, $1+3$, $2+2$ и $3+1$. Таким образом, $P=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{0,5}{3}=0,16666...\approx 0,167$.

B11 Ответ: 24.

Решение. Легко установить, что сторона куба a равна высоте h цилиндра, а радиус основания цилиндра $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Как известно, объём цилиндра равен $V=h\pi r^2=a\pi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\pi a^3}{2}=4\pi$. Отсюда $a^3=8$, т.е. $a=2$, тогда полная поверхность куба $S=6a^2=24$.

B12 Ответ: 43. **Указание.** См. решение B12 вар. 9.

B13 Ответ: 5.

Решение. Пусть V л — объём сосуда. После того, как отлили 1 л спирта, спирт занял $\frac{V-1}{V}$ часть сосуда. После того, как долили 1 л воды, спирта стало $V\cdot\frac{V-1}{V}$ л. После того, как отлили 1 л смеси воды и спирта, получили $(V-1)\cdot\frac{V-1}{V}$ л спирта в сосуде. После доливания 1 л воды спирт будет занимать $\left(\frac{V-1}{V}\right)^2$ часть сосуда, а количество спирта будет $V\cdot\left(\frac{V-1}{V}\right)^2$ л. По условию спирта больше, чем воды, на 1,4 л. Следовательно, воды в сосуде

$V\cdot\left(\frac{V-1}{V}\right)^2-1{,}4$ л. Общий объём смеси равен V. Тогда имеет место уравнение, определяющее V: $2V\left(\frac{V-1}{V}\right)^2-1{,}4=V$ или $5V^2-27V+10=0$. Откуда $V=\frac{2}{5}$ л и $V=5$ л. Но $V=\frac{2}{5}$ л не подходит по смыслу задачи.

B14 Ответ: 2. **Указание.** См. пример 8.2.11*.

Решение. Если y' имеет только один нуль, то функция y имеет единственную критическую точку. Найдём y': $y'=3x^2+$ $+6(a-1)x+12$. Квадратичная функция имеет единственный нуль, если $D=0$, т.е. $36(a-1)^2-144=0$ и $|a-1|=2$, $a_1=3$, $a_2=-1$.

C1 Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ y=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k,n\in Z;$
$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k,n\in Z.$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы к виду $\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 2y)=\cos^2 x$ или $2\cos^2 x-1-(2\cos^2 y-1)=2\cos^2 x$.

Откуда следует, что $\cos y=0$ и $y=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$. Если $\cos y=0$, то $\sin y=\pm 1$. Пусть $\sin y=1$, тогда из второго уравнения исходной системы следует, что $\cos x=\frac{1}{2}$. Пусть $\sin y=-1$, тогда из второго уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$.

Решением исходной системы является объединение решений двух систем 1) $\begin{cases}\sin y=1;\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}$, 2) $\begin{cases}\sin y=-1;\\ \cos x=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

Для первой системы: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ y=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k,n\in Z;$

для второй системы: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k,n\in Z.$

C2 Ответ: 100. **Указание.** См. задание C2 вар. 9.

Решение.

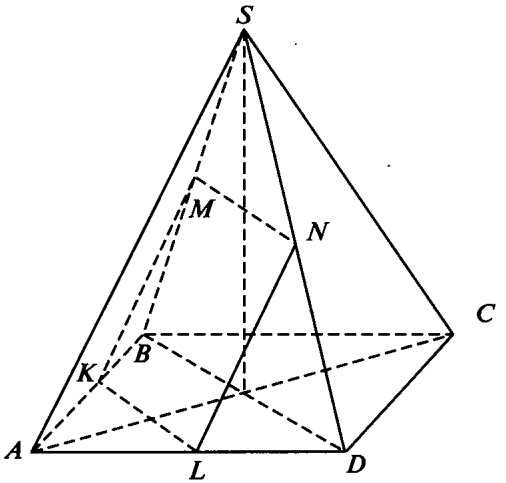

Рис. C2.10

Поскольку KL и MN — средние линии треугольников ABD и BSD соответственно (см. рис. C2.10), $KL = MN = \frac{BD}{2} = 10$. Кроме того, $KL \parallel MN$. Следовательно, четырёхугольник $KMNL$ — параллелограмм. Легко доказать, что $KN = ML$ (см. решение C2 вар. 9). Тогда $KMNL$ — прямоугольник, в котором $MK = NL = \frac{AS}{2} = 10$. Следовательно, $S_{KMNL} = 100$ кв. ед.

C3 Ответ: $(-\infty;2]$. **Указание.** Преобразуйте выражения под знаком радикала.

Решение. Если $3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2$ и $3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$, то $(\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = (\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)^x = (2\sqrt{2})^x$, $(\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 2^x$ и неравенство принимает вид $(2\sqrt{2})^x \leqslant 10-x$. Слева монотонно возрастающая функция, справа монотонно убывающая. Очевидно, что равенство выполняется при $x=2$. Тогда при $x<2$ $(2\sqrt{2})^x < 10-x$. Следовательно, решением неравенства является множество $x \leqslant 2$. Можно дать второй вариант

доказательства. Неравенство $(2\sqrt{2})^x \leqslant 10-x$ запишем в виде $(2\sqrt{2})^x + x - 10 \leqslant 0$. Функция $y=(2\sqrt{2})^x + x - 10$ монотонно возрастает для $\forall x$, причём при $x=2$ $y=0$. Следовательно, $y<0$ при $x<2$ и неравенство выполняется при $x \leqslant 2$.

C4 Ответ: $6(18+\sqrt{46})$.

Решение.

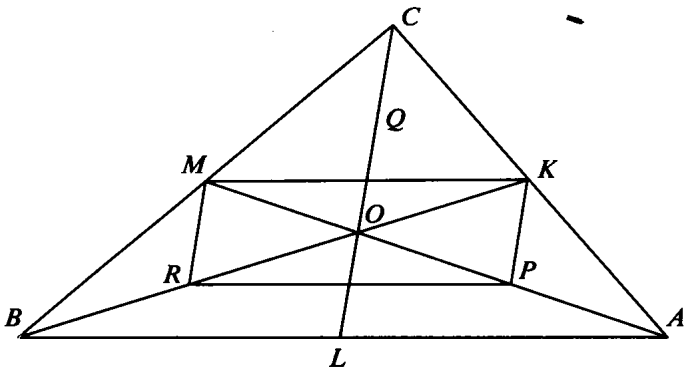

Рис. C4.10

Поскольку K и M — середины сторон AC и BC треугольника ABC, KM — средняя линия этого треугольника (см. рис. C4.10). Следовательно, $KM = \frac{1}{2}AB = 108:2 = 54$ и $KM \parallel AB$.

P и R — середины сторон AO и BO треугольника AOB, PR — средняя линия треугольника AOB, поэтому $PR = \frac{1}{2}AB = 108:2 = 54$ и $PR \parallel AB$. Таким образом, отрезки KM и PR параллельны и равны, следовательно, $KPRM$ — параллелограмм. Рассуждая аналогичным образом, можно сделать вывод о том, что PK и MR — средние линии треугольников ACO и BCO соответственно, параллельные их общей стороне OC. Значит, $PK = MR = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}CL = \frac{1}{3}CL$, так как точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2:1. Длину медианы CL можно найти, используя теорему косинусов. Действительно, согласно этой теореме

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC$, откуда

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{108^2 + 72^2 - 90^2}{2 \cdot 108 \cdot 72} = 9^2 \cdot \frac{12^2 + 8^2 - 10^2}{9^2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 8} =$$

$= \frac{144 + 64 - 100}{2 \cdot 12 \cdot 8} = \frac{9}{16}$. L — середина стороны AB, и $AL = 54$. Используя теорему косинусов, находим длину стороны CL треугольника ACL:

$$CL^2 = AL^2 + AC^2 - 2AL \cdot AC \cdot \cos\angle BAC = 54^2 + 72^2 - 2 \cdot 54 \cdot 72 \cdot \frac{9}{16} =$$

$= 9^2(100 - 54) = 9^2 \cdot 46$, откуда следует, что $CL = 9\sqrt{46}$, следовательно, $MR = KP = \frac{1}{3}CL = 3\sqrt{46}$. Таким образом, периметр параллелограмма $KPRM$ равен $P_{KPRM} = KM + MR + RP + PK = 2(54 + 3\sqrt{46}) =$ $= 6(18 + \sqrt{46})$.

C5 Ответ: $a = 0$, $x = y = 0$; $a > 0$, $x = \frac{5}{8}a^2$,

$y = \frac{\sqrt{6}}{8}a^2$; $a < 0$, $x = \frac{5}{8}a^2$, $y = -\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$.

Решение.

Пусть $a = 0$. Тогда из первого уравнения следует, что $y = 0$, а из второго уравнения $x = 0$. Таким образом, при $a = 0$ система имеет единственное решение $(0;0)$.

Пусть $a \neq 0$. Если $a > 0$, то $\sqrt{x + 2y} > \sqrt{x - 2y}$, если $a < 0$, то $\sqrt{x - 2y} > \sqrt{x + 2y}$. Возведём обе части первого уравнения в квадрат: $x + 2y - 2\sqrt{x^2 - 4y^2} + x - 2y = a^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4y^2} = x - \frac{a^2}{2}$ (1) Тогда второе уравнение системы примет вид: $\sqrt{x^2 + 4y^2} = \frac{3}{2}a^2 - x$. (2)

Возведём обе части второго уравнения в квадрат:

$$x^2 + 4y^2 + 2\sqrt{x^2 + 4y^2} \cdot \sqrt{x^2 - 4y^2} + x^2 - 4y^2 = a^4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4y^2} \cdot \sqrt{x^2 - 4y^2} = \frac{a^4}{2} - x^2$. (3) Из уравнений (1), (2), (3)

следует, что $\left(x-\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{3}{2}a^2-x\right)=\frac{a^4}{2}-x^2$ и $x=\frac{5}{8}a^2$. Подставив $x=\frac{5}{8}a^2$ в первое уравнение, получим $y^2=\frac{3}{32}a^4$. Откуда $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$. Если $a>0$, то из условия $x+2y>x-2y>0$ следует, что $y>0$, значит, $y=\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$. Если $a<0$, то из условия $x-2y>x+2y>0$ следует, что $y<0$. Тогда $y=-\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$. Сделаем проверку первого уравнения системы при $a<0$.

$$\sqrt{\frac{5}{8}a^2-\frac{2\sqrt{6}}{8}a^2}-\sqrt{\frac{5}{8}a^2+\frac{2\sqrt{6}}{8}a^2}=|a|\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{8}}-|a|\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{8}}=$$

$$=|a|\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=-a\left(\frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=a.$$

C6 Ответ: 1875.

Решение. Запишем указанное число в виде $\overline{xyzt}$, где x — число тысяч, y — число сотен, z — число десятков, t — число единиц. Из условий следует, что $\begin{cases} x+y+z=16, \\ y+z+t=20, \\ z-t=2. \end{cases}$

Выразим x, y, z через t: $x=t-4$, $y=18-2t$, $z=t+2$ и рассмотрим функцию $S(t)=x^2+y^2+z^2+t^2=7t^2-76t+344$. Минимум этой функции находится из условия $S'(t)=0$ или $14t-76=0$. Очевидно, что $S(t)$ принимает наименьшее значение при $t=\frac{38}{7}$, но t — натуральное число, и это либо 5, либо 6. При $t=5$ $S(t)=139$, а при $t=6$ $S(t)=140$. Следовательно, выбираем $t=5$. Тогда $x=1$, $y=8$, $z=7$ и искомое число 1875.

Содержание