



Подготовься без напряжения!

ЕГЭ-2011 по математике: 12 советов для "чайников"

Часть 1: «Скажи двойке «Нет»!

(Задания В1 – В6)

El Corto

Оглавление

Введение	3
ЕГЭ-2011: Задание В1	4
ЕГЭ-2011: Задание В2	12
ЕГЭ-2011: Задание В3	16
Показательные уравнения.....	17
Отступление №1: «Степени чисел»	17
Примеры решения показательных уравнений	19
Уравнения, содержащие корень	21
Логарифмические уравнения.....	23
Отступление №2: «немного о логарифмах».....	24
Логарифмы – что это?	24
Логарифмы: «инструкция по применению»	26
И еще одна особенность логарифмов	27
Примеры решения логарифмических уравнений	27
ЕГЭ-2011: Задание В4	31
Отступление №3: «Азбука тригонометрии»	31
Примеры решения заданий В4	33
Отступление №4: «формулы приведения».....	42
ЕГЭ-2011: Задание В5	48
ЕГЭ-2011: Задание В6	54
ЕГЭ-2011: Задание В7	59
ЕГЭ-2011: Задание В8	62
Отступление №4: «Производная функции: что это?».....	62
Примеры решения заданий В8	64
ЕГЭ-2011: Задание В9	67
Примеры решения заданий В9	68

ЕГЭ-2011: Задание В10	71
Примеры решения заданий В10	72
ЕГЭ-2011: Задание В11	76
Задания В11 Первого типа	77
Примеры решения заданий В11 Первого типа	77
Задания В11 Второго типа	78
Отступление №5: «Вычисление производной функции по заданной формуле этой функции»	78
Примеры решения заданий В11 Второго типа	79
Примеры решения заданий В11 Первого типа (продолжение)	79
ЕГЭ-2011: Задание В12	82
Общие рекомендации	82
Примеры решения заданий В12	83
Закключение	87

Введение

Вашему вниманию предлагается 1-я часть пособия

«ЕГЭ – 2011 по математике: 12 советов для «чайников»».

Эта часть включает рекомендации по решению заданий В1 – В6 экзамена,
а также примеры их решения.

Все то, что обычно принято писать во введении, размещено на Главной странице
сайта www.EGEprosto.ru.

Заказать полную версию Пособия (задания В1 – В12) вы можете с помощью
пункта меню «ЗА!каз» или на Главной странице сайта.

Свои отзывы и пожелания вы можете отправить через Форму обратной связи,
которая находится в пункте меню «Ваши пожелания».

Желаю успехов в работе с 1-й частью!

Автор

ЕГЭ-2011: Задание В1

Желтые груши и красные яблоки, разноцветные кубики и кружочки.

Их сложение и вычитание. Начальная школа. Что-то похожее вспоминается при взгляде на задания В1. По крайней мере – мне.

Возможно, у кого-то воспоминания о начальной школе связаны с новым мобильником, первой выкуренной сигаретой или регистрацией ВКонтакте ☺.

Кажется, что эти задания настолько просты, что ошибиться в них невозможно – и это почти так. Еще как возможно! Особенно, если делать их быстро и как попало, да еще и считать в уме.

Основные советы по выполнению этих заданий:

- ✓ Делать к ним рисунки;
- ✓ Все вычисления производить только письменно и с последующей проверкой;
- ✓ Не торопиться (а этот совет относится абсолютно ко всем заданиям!).

Итак, несколько примеров решения заданий В1.



В1.1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 590 рублей. Стоимость билета школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 14 школьников и 3 взрослых. Сколько стоят билеты на всю группу? Ответ выразите в рублях.

Подобные задачи удобно решать в следующем порядке.

1-й этап: отразить суть задачи простым и понятным рисунком.

Из этого рисунка и будет впоследствии ясно, как ее решать. Делаем рисунок поэтапно, по мере прочтения очередного куска условия (то есть до какой-либо точки или запятой). На рисунок нужно схематически нанести все данные из условия задачи.

Например, рисунок может получиться таким (рис. 1.1).

2-й этап: вычисления.

Из рисунка понятно, что общая стоимость билетов равна

$$14 \cdot 295 + 3 \cdot 590 = 5900 \text{ (руб.)}$$

3-й этап: дополнительная проверка ответа.

В данном случае достаточно пересчитать все заново.

4-й этап: записать ответ.

5	9	0	0				
---	---	---	---	--	--	--	--

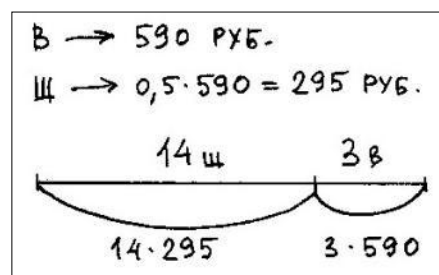


Рисунок 1.1

В1.2. Теплоход рассчитан на 600 пассажиров и 20 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

1-й этап: отразить суть задачи простым и понятным рисунком.

Можно предложить, например, такой вариант рисунка (рис. 1.2).

2-й этап: вычисления.

Найдем, «сколько раз по 60 уместится в 620-и»: $\frac{620}{60} = \frac{62}{6} = 10 \frac{2}{6}$.

Вывод: десяти шлюпок будет недостаточно.

Значит, их должно быть 11.

3-й этап: дополнительная проверка ответа.**4-й этап: записать ответ.**

1	1						
---	---	--	--	--	--	--	--

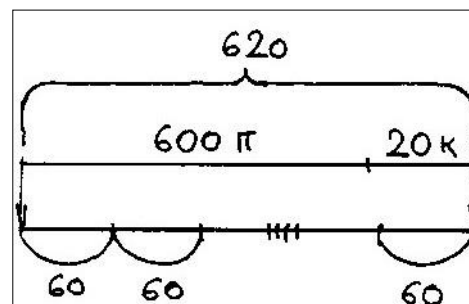


Рисунок 1.2

В1.3. Сырок стоит 5 руб. 70 коп. Какое наибольшее число сырков можно купить на 50 рублей? (рис. 1.3).

1-й этап: отразить суть задачи простым и понятным рисунком.**2-й этап: вычисления.**

$$\frac{50}{5,7} = \frac{500}{57} = 8 \frac{44}{57}$$

(вспомнить вычисление «в столбик»!).

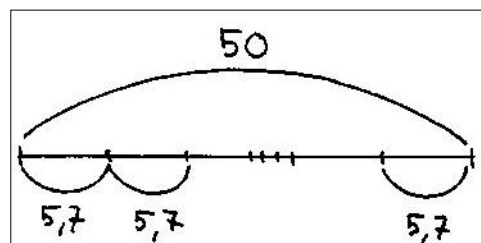


Рисунок 1.3

Вывод: на 50 рублей можно купить 8 сырков.

3-й этап: дополнительная проверка ответа.

$$8 \cdot 5,7 = 45,6$$

(действительно, денег хватает только на 8 сырков).

4-й этап: записать ответ.

8							
---	--	--	--	--	--	--	--

В1.4. В супермаркете проходит рекламная акция: покупая 4 шоколадки, 5-ю шоколадку покупатель получает в подарок. Шоколадка стоит 20 руб. Какое наибольшее число шоколадок можно получить за 390 руб.?

1-й этап: отразить суть задачи простым и понятным рисунком (рис. 1.4).

2-й этап: вычисления.

$$\frac{390}{80} = \frac{39}{8} = 4\frac{7}{8}$$

(вычисление «в столбик»!).

Вывод: за 390 рублей можно купить 4 набора шоколадок по 4 шт. Значит, подарочных шоколадок получится 4 шт.

3-й этап: дополнительная проверка ответа.

$$(4 \cdot 20) \cdot 4 = 320 \text{ — оставшихся 70 рублей на 5-й набор с подарком действительно}$$

не хватит, так как он стоит 80 рублей.

4-й этап: записать ответ.

4							
---	--	--	--	--	--	--	--

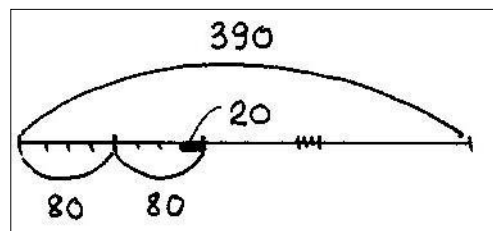


Рисунок 1.4

В1.5. Цена на товар была повышена на 16% и составила 348 рублей. Сколько рублей стоил товар до повышения цены? (рис. 1.5).

1-й этап: отразить суть задачи простым и понятным рисунком.

2-й этап: вычисления.

Из условия известно, что после повышения 16% цена стала равной 116% от x (то есть $1,16x$) а

$$1,16x = 348 \text{ (где } x \text{ — первоначальная цена).}$$

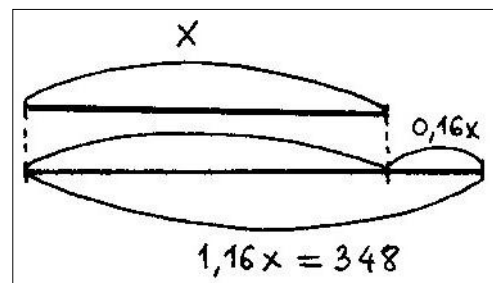


Рисунок 1.5

$$x = \frac{348}{1,16} = \frac{34800}{116} = \frac{17400}{58} = \frac{8700}{29} = 300.$$

3-й этап: дополнительная проверка ответа.

$$300 \cdot 1,16 = 348 \quad (\text{вычисление «в столбик»!}).$$

4-й этап: записать ответ.

3	0	0					
---	---	---	--	--	--	--	--

В1.6. Стоимость покупки с учетом 3-процентной скидки по дисконтной карте составила 1746 рублей. Сколько рублей пришлось бы заплатить за покупку при отсутствии дисконтной карты?

1-й этап: отразить суть задачи простым и понятным рисунком (рис. 1.6).

2-й этап: вычисления.

1-й ВАРИАНТ.

На рисунке видно, что $0,97x = 1746$.

$$\text{Тогда } x = \frac{1746}{0,97} = \frac{174600}{97} = 1800 \text{ (руб.)}$$

2-й ВАРИАНТ.

Можно составить пропорцию:

$$0,97x - 1746 \text{ руб.}$$

$$x \quad - \quad ? \text{ руб.}; \quad ? = \frac{1746x}{0,97x} = 1800 \text{ (руб.)}$$

3-й этап: дополнительная проверка ответа.

$$0,97 \cdot 1800 = (\text{вычисление «в столбик»!}) = 1746 - \text{правильно!}$$

4-й этап: записать ответ.

1	8	0	0				
---	---	---	---	--	--	--	--

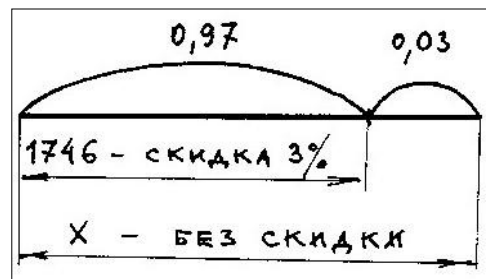


Рисунок 1.6

В1.7. Розничная цена учебника 345 руб., она на 18% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 7000 рублей?

1-й этап: отразить суть задачи простым и понятным рисунком.

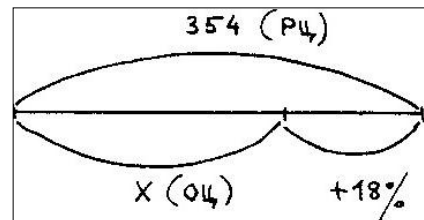


Рисунок 1.7а

Если первый вариант рисунка к задаче вдруг показался вам не совсем хорошим (рис. 1.7а), то его можно быстро переделать (рис. 1.7б).

2-й этап: вычисления.

На рисунке видно, что $1,18x = 354$. Оптовая цена $x = \frac{354}{1,18} = \frac{35400}{118} = \frac{17700}{59} = 300$.

На 7000 рублей можно купить $\frac{7000}{300} = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$.

3-й этап: дополнительная проверка ответа.

$300 \cdot 1,18 =$ (вычисление «в столбик»!) $= 354$.

Оптовая цена найдена правильно.

$23 \cdot 300 =$ (вычисление «в столбик»!) $= 6900$.

Денег хватит на 23 учебника, и еще останется 100 рублей.

Правильно.

4-й этап: записать ответ.

2	3						
---	---	--	--	--	--	--	--

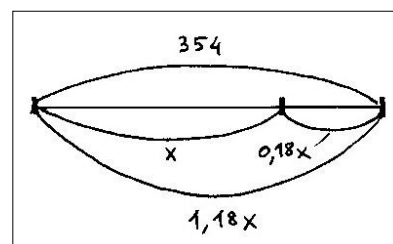


Рисунок 1.76

Ввиду исключительной простоты заданий В1, приведенных примеров должно быть достаточно для понимания общего подхода к ним.

В первое время вам может быть лениво делать рисунки к таким простым задачкам, но эту (такую понятную) лень лучше победить сразу, так как навыки составления рисунков еще очень даже пригодятся в дальнейшем. Особенно, в заданиях В12, к которым без рисунков лучше даже не подходить!

Так что лучше начинать учиться вовремя и на простом ☺.

Ну что, я вас убедил?

Не тут-то было! Как показывает практика, некоторая часть учеников так и не будет делать никаких рисунков вообще. А некоторая часть порисует – порисует, а потом вернется к менее удобной, но зато такой привычной (!) для них схеме работы.

Именно поэтому решим несколько задач традиционным, «школьным» способом. Как говорится «почувствуйте разницу».

В1.8. Билет на наземный транспорт стоил 20 руб., после повышения цены на 10% на сколько билетов меньше можно купить на 200 руб.?

1-й этап: рассуждения и вычисления.

На 200 руб. до повышения цены можно было купить $\frac{200}{20} = 10$ билетов.

После повышения цены денег хватит на $\frac{200}{22} = \frac{100}{11} = 9\frac{1}{11}$ (то есть 9) билетов.

Отвечая на вопрос задачи «на сколько билетов меньше...», вычтем из большего их количества меньшее: $10 - 9 = 1$. Это и будет ответом задачи.

2-й этап: дополнительная проверка ответа.

Повторим все вычисления заново.

3-й этап: записать ответ.

1							
---	--	--	--	--	--	--	--

В1.9. При покупке товаров на сумму свыше 10000 руб. магазин предоставляет скидку 15%. Какую сумму надо заплатить за компьютер стоимостью 16500 руб.?

1-й этап: рассуждения и вычисления.

Компьютер стоит больше 10000 руб., значит с его первоначальной, 100% - ой стоимости предусмотрена скидка. Таким образом, его можно купить не за 100%, а за $100 - 15 = 85\%$.

Окончательная цена равна $(1 - 0,15) \cdot 16500 = 0,85 \cdot 16500 = 14025$ рублей.

2-й этап: дополнительная проверка ответа.

Повторим все вычисления заново.

3-й этап: записать ответ.

1	4	0	2	5			
---	---	---	---	---	--	--	--

В1.10. Транспортёр за 40 минут работы подает 1,4 тонн руды. После этого следует 10-ти минутный перерыв. Сколько тонн руды будет подано с 9 до 13 часов?

1-й этап: рассуждения и вычисления.

По условию задачи, транспортёр работает 4 часа, то есть $4 \cdot 60 = 240$ минут.

Также известно, что один «цикл работы» длится $40 + 10 = 50$ минут.

Найдем количество таких полных циклов за 240 минут: $\frac{240}{50} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$.

«Остаточные» $\frac{4}{5}$ цикла составляют $\frac{4}{5} \cdot 50 = 40$ минут, то есть за этот неполный

цикл будет добыт «полный объем» руды в 1,4 тонны.

Итак, общее количество добытой руды равно $4 \cdot 1,4 + 1,4 = 5 \cdot 1,4 = 7$ тонн.

2-й этап: дополнительная проверка ответа.

Повторим все вычисления заново.

3-й этап: записать ответ.

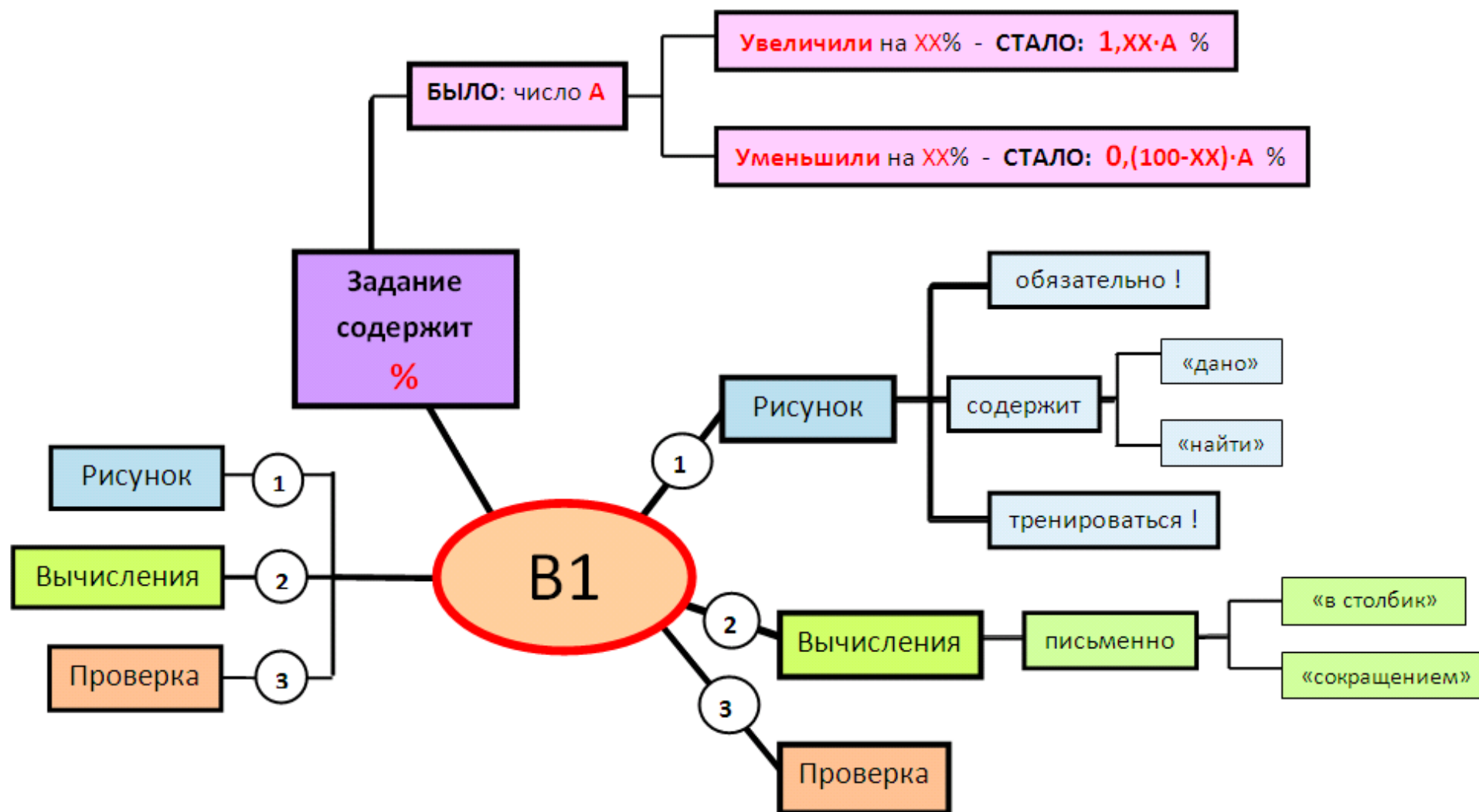
7							
---	--	--	--	--	--	--	--

Не знаю как вам, а мне в последних трех задачах не хватало своих пусть и корявых, но таких «разгружающих мозг» картинок.

Для самостоятельного решения подобных задач воспользуйтесь [«Открытым банком заданий по математике»](#).

А теперь подведем краткие итоги этой главы на картинке, размещенной на следующей странице.

Успехов вам в самых первых заданиях ЕГЭ!



ЕГЭ-2011: Задание В2

Задания В2 – самые простые из всех заданий ЕГЭ. Кажется, что достаточно только посмотреть на график, и правильный ответ будет найден! Но даже в этих заданиях время от времени случаются ошибки.

А чтобы этого не произошло, нужно подстраховаться: не торопясь нарисовать (!) на графике ответ на заданный вопрос. Сделав на нем перед этим необходимые пометки, и еще раз внимательно перечитай само задание.

Цель работы с В2 – не показать свой могучий математический интеллект и быстроту мышления, а заработать на нем такой необходимый балл.

Поэтому права на ошибку (типа «ой, я неправильно посмотрел») здесь точно нет!

Рассмотрим несколько типичных примеров таких заданий.



В2.1. На графике показано изменение цены билета на одну поездку в Самарском метрополитене в период с 1 января 1998 по 1 января 2009 года. Во сколько раз увеличилась стоимость поездки на метро с 1 января 2001 года по 1 марта 2007 года? (рис. 2.1).

1-й этап: работа с графиком.

Ответить на вопрос «во сколько раз увеличилась...» очень просто: найдем стоимость поездки на 1 марта 2007 года и поделим ее на стоимость поездки 1 января 2001 года (то, что стало – на то, что было).

Делаем на графике пометки и

вычисляем: $\frac{\text{стало}}{\text{было}} = \frac{9}{3} = 3$ (раз).

2-й этап: записать ответ.

3						
---	--	--	--	--	--	--

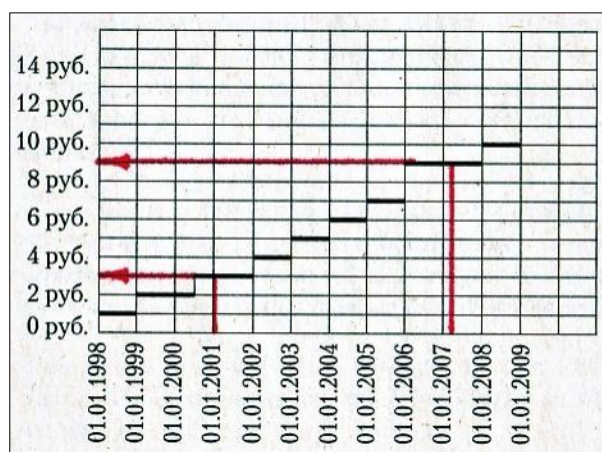


Рисунок 2.1

В2.2. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток, начиная с 0 ч. 13 августа. На оси абсцисс отчается время суток в часах, на оси ординат – значение температуры в градусах. Определите по графику, до какой наибольшей температуры прогрелся воздух 14 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия (рис. 2.2).

1-й этап: работа с графиком.

Отмечаем на рисунке границы (начало и конец суток) 14 августа. Находим максимальную температуру за этот день (**12 °C**), причем в ответ единицу измерения записывать не нужно.

2-й этап: записать ответ.

1	2						
---	---	--	--	--	--	--	--

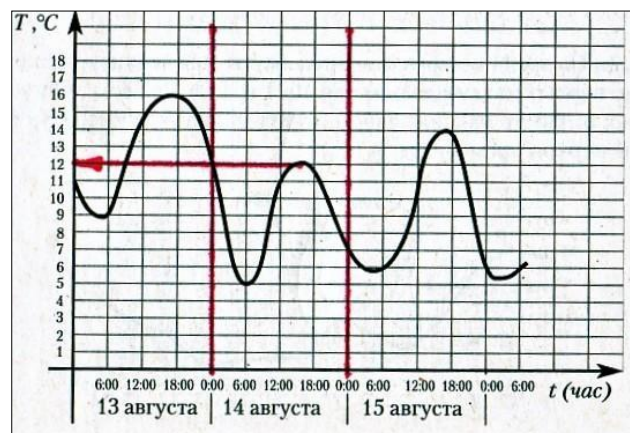


Рисунок 2.2

В2.3. На графике показана среднесуточная температура воздуха в течение первых двух недель июля 1991 года в Ижевске. Какого числа (в наблюдаемый период) температура впервые упала до 18 градусов (рис. 2.3)?

1-й этап: работа с графиком.

Из графика видно: понижаясь с начала июля, среднесуточная температура впервые равна **18 °C** 4-го числа.

2-й этап: записать ответ.

4							
---	--	--	--	--	--	--	--



Рисунок 2.3

В2.4. На диаграмме показано изменение цены на серебро в период с 3 по 17 августа 2009 года (в долларах за унцию). Сколько дней за рассматриваемый период времени цена превышала 14,5 долларов за унцию (рис. 2.4)?

1-й этап: работа с графиком.

«Превышала 14,5 долларов» означает, что была больше этого числа. Отмечаем и подсчитываем на графике количество таких дней (получается 10 дней).

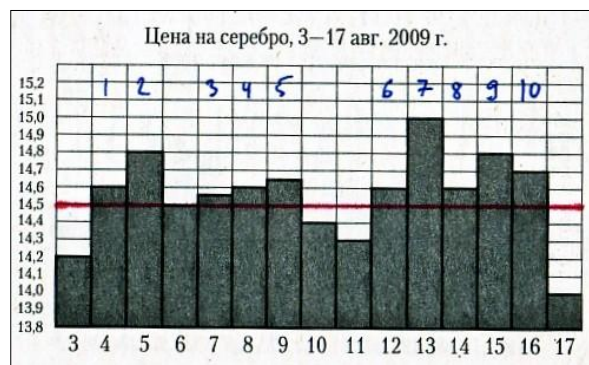


Рисунок 2.4

2-й этап: записать ответ.

1	0						
---	---	--	--	--	--	--	--

В2.5. На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Омске в период с 14 по 27 января 1974 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат – температура в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько дней из указанного периода средняя температура была в пределах от -26°C до $-21,5^{\circ}\text{C}$ (рис. 2.5).

1-й этап: работа с графиком.

«В пределах от -26°C до $-21,5^{\circ}\text{C}$ » нужно понимать как сами числа -26 и $-21,5$, и все, что находится между ними. Отмечаем на графике этот «коридор» и количество дней в нем (7 дней).



Рисунок 8

2-й этап: записать ответ.

7							
---	--	--	--	--	--	--	--

В2.6. На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Риге в период с 15 по 28 марта 1943 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат – температура в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько дней из указанного периода средняя температура была не ниже 3°C (рис. 2.6).

1-й этап: работа с графиком.

Слова «не ниже 3°C » нужно понимать как саму температуру 3°C и все, что больше нее. Отмечаем на графике границу 3°C и подсчитываем количество дней (5 дней).



Рисунок 2.6

2-й этап: записать ответ.

5							
---	--	--	--	--	--	--	--

В2.7. На рисунке изображен график, описывающий прямолинейное движение автомобиля. По горизонтальной оси отложено время (в часах), по вертикальной – расстояние от пункта А (в километрах). Известно, что через 180 минут после начала движения автомобиль достиг пункта В и продолжил движение. Определите расстояние в километрах между пунктами А и В (рис. 2.7).

1-й этап: работа с графиком.

Единственное, что нужно сообразить в этой задаче – то, что 180 минут = 3 часа.

А дальше – работа с графиком.

2-й этап: записать ответ.

3	5						
---	---	--	--	--	--	--	--

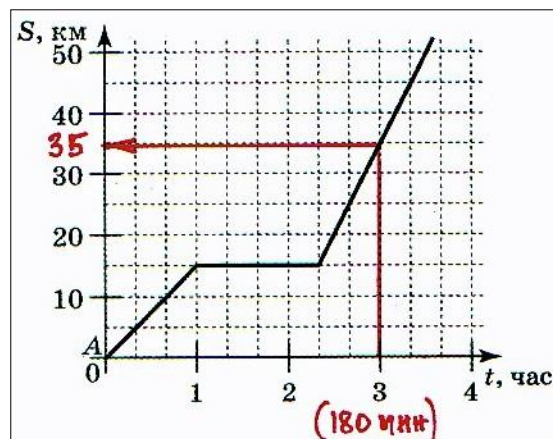


Рисунок 2.7

В2.8. На рисунке изображен график, описывающий прямолинейное движение автомобиля от пункта А до пункта В.

По горизонтальной оси отложено время (в часах), по вертикальной – расстояние от пункта А (в километрах). Доехав до пункта В, автомобиль сделал в нем остановку, после чего вернулся в пункт А.

Определите, сколько минут длилась остановка (рис. 2.8).

1-й этап: работа с графиком.

По графику видно, что величина пройденного пути не изменялась (то есть была остановка) на протяжении 80 минут: 4 клетки по 20 минут каждая.

2-й этап: записать ответ.

8	0						
---	---	--	--	--	--	--	--

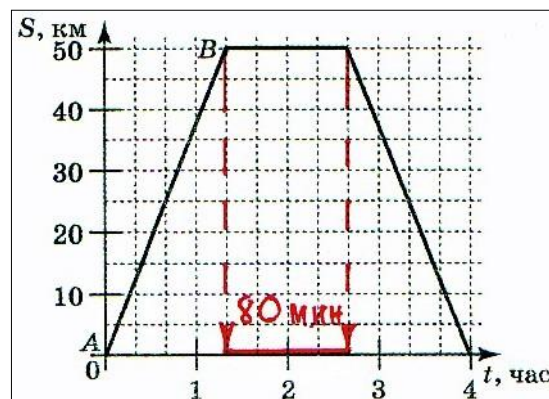


Рисунок 2.8

Более разноплановые задания В2 можно найти в

[«Открытом банке заданий по математике»](#), и как следует потренироваться на них!

ЕГЭ-2011: Задание В3

Еще одна возможность заработать легкий балл – решить уравнение, которое предлагает задание В3 («найдите корень уравнения»).

Предлагаемое на ЕГЭ уравнение, судя по всему, будет относиться к одному из 3-х типов:

1) *Показательное* (например, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-12} = \frac{1}{9}$).

В этих уравнениях x находится в показателе степени, то есть «наверху»;

2) Уравнение, содержащее *корень* (например, $\sqrt{2x+7} = 5$).

В этих уравнениях x находится под знаком корня;

3) *Логарифмическое* (например, $\log_2(8-x) = 4$).

Эти уравнения, как следует из названия, содержат так называемые «логарифмы», и x находится «под знаком логарифма».

Раздел, посвященный заданию В3, получится довольно большим, так как придется подробно рассматривать решение уравнений всех 3-х типов. Но придется потерпеть – не отказываться же из-за этого от возможности «срубить» балл на столь раннем этапе ЕГЭ!

Для того, чтобы при чтении не нужно было отвлекаться на справочники и учебники (а ведь искать их, а потом листать, а потом еще и разбираться в написанном так не хочется ☺), в этом Пособии были задуманы специальные тематические Отступления. А это еще дополнительный объем для чтения.

В этих Отступлениях содержится теоретическая информация, минимально необходимая для понимания и выполнения заданий по обсуждаемой теме. Причем, без лишнего мусора – то есть всевозможных определений, доказательств и ненужных рассуждений.

Более того, в этих Отступлениях порой специально искажается и огрубляется математическая суть разбираемой темы. И причина этого проста – иногда проще и правильнее «тупо сделать» не понимая тонкостей, чем тратить время и силы на доскональное понимание. Подобно тому, как многие люди вполне успешно работают на компьютере, не зная принципов его работы. А тем более – компьютерного «железа».

И вот – для поддержания умственного тонуса – и первое тематическое Отступление, связанное с показательными уравнениями.

Показательные уравнения

Отступление №1: «Степени чисел»

Освежим память когда-то знакомыми сведениями.

1. Как известно, степени чисел могут быть целыми и дробными, положительными и отрицательными. Кратко напомним об этом конкретными примерами.

- а) Целая положительная степень (то есть 1, 2, 3 ... и так далее).

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4,$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32,$$

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125,$$

$$10^1 = 10.$$

- б) Целая отрицательная степень (то есть -1, -2, -3 ... и так далее).

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32},$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125},$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}. \quad \text{В общем случае,} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

- в) Дробная положительная степень.

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2;$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2;$$

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

В числителе дроби не обязательно должна стоять 1. В этом случае число нужно понимать так:

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3};$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4;$$

$$81^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{81^5} \text{ и так далее.}$$

d) Дробная отрицательная степень.

Здесь получается комбинация пунктов b) и c).

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2},$$

$$4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}, \text{ и так далее.}$$

Вместе с тем, многие числа, возведенные в дробную степень, не могут быть выражены в виде целых чисел (и даже простых дробей).

Например, $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$, $20^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{20}$. В этих случаях их именно так и записывают, без дальнейшего вычисления.

e) Любое число в нулевой степени равно 1.

$$4^0 = 1, \quad 10^0 = 1 \text{ и так далее.}$$

f) 1 в любой степени равно 1.

$$1^5 = 1, \quad 1^{-2} = 1, \quad 1^{99} = 1 \text{ и так далее.}$$

2. Следующий набор формул показывает, какие действия можно выполнять с двумя и более числами, имеющими степени (то есть любыми числами, указанными в пунктах a) – f)). **Обратите внимание**, что умножать и делить друг на друга можно только числа с **одинаковыми** основаниями!

a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Например, $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$;

b) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. Например, $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$;

c) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Например, $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$;

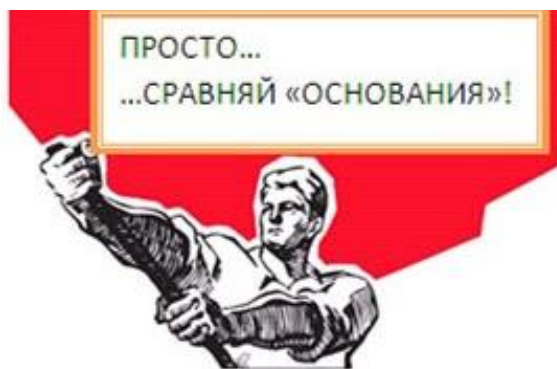
d) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Например, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$;

e) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Например, $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$.

Вот такое получилось Отступление №1 – интересное и бодрящее ☺.

А теперь сделаем паузу, порезвимся с «Твиксом», и вернемся к нашим показательным уравнениям.

Примеры решения показательных уравнений



В3.1. Найдите корень уравнения, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-12} = \frac{1}{9}$.

Показательные уравнения удобно решать по следующей простой схеме.

1-й этап: привести обе части уравнения к одинаковым основаниям.

В принципе, можно приводить левое основание к правому, правое к левому или оба основания к какому-либо третьему. А выбирать нужно тот вариант приведения, который проще с точки зрения вычислений. Зачем создавать себе лишние трудности?

В нашем примере удобнее поработать с правой частью:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = \frac{1^2}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

Тогда уравнение будет выглядеть так: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-12} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

2-й этап: приравнять «верхушки», то есть степени.

$$x - 12 = 2$$

$$x = 2 + 12 = 14$$

3-й этап: проверить полученный корень (корни).

Подставляем $x = 14$ в исходное уравнение и проверяем, будут ли равны обе части

уравнения: $\left(\frac{1}{3}\right)^{14-12} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$

Действительно, при $x = 14$, левая часть уравнения равна правой.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

1	4						
---	---	--	--	--	--	--	--

В3.2. Найдите корень уравнения $4^{5x-13} = \frac{1}{64}$.

1-й этап: привести обе части уравнения к одинаковым основаниям.

Проще преобразовать правую часть уравнения к основанию 4:

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{4^3} = 4^{-3}.$$

Тогда уравнение будет выглядеть так: $4^{5x-13} = 4^{-3}$.

2-й этап: приравнять «верхушки», то есть степени.

$$5x - 13 = -3$$

$$5x = -3 + 13 = 10$$

$$x = 10/5 = 2$$

3-й этап: проверить полученный корень (корни).

$$4^{5 \cdot 2 - 13} = 4^{10 - 13} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

Проверка показала, что корень $x = 2$ найден правильно.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

2							
---	--	--	--	--	--	--	--

В3.3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-12} = 64$.

1-й этап: привести обе части уравнения к одинаковым основаниям.

В этом примере лучше преобразовать обе части уравнения к основанию 8.

С учетом того, что $\frac{1}{8} = 8^{-1}$, а $64 = 8^2$, получим такое уравнение:

$$(8^{-1})^{x-12} = 8^2$$

$$8^{-x+12} = 8^2$$

2-й этап: приравнять «верхушки», то есть степени.

$$-x + 12 = 2$$

$$x = 12 - 2 = 10$$

3-й этап: проверить полученный корень (корни).

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{10-12} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = 1 / \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 64. \text{ Уравнение решено правильно.}$$

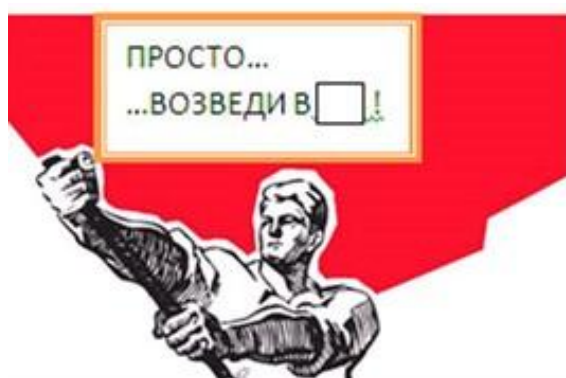
4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

1	0						
---	---	--	--	--	--	--	--

А теперь перейдем ко второму типу уравнений, ожидаемых в задании В3.

Уравнения, содержащие корень

Судя по всему, в задании В3 может встретиться как корень 2-й степени (обычный «квадратный» корень, то есть $\sqrt{\quad}$), так и корень 3-й степени, то есть $\sqrt[3]{\quad}$.



В3.4. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+7} = 9$.

Уравнения такого типа удобно решать по следующей простой схеме.

1-й этап: возведение обеих частей уравнения в квадрат

(то есть во 2-ю степень) для того, чтобы избавиться от корня.

$$(\sqrt{2x+7})^2 = 9^2$$

$$2x + 7 = 81$$

$$2x = 81 - 7 = 74$$

$$x = 74/2 = 37$$

2-й этап: проверить полученный корень.

$$\sqrt{2 \cdot 37 + 7} = \sqrt{74 + 7} = \sqrt{81} = 9$$

И действительно, при $x = 37$ левая часть уравнения равна правой части.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

3	7						
---	---	--	--	--	--	--	--

В3.5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2x+53}{7}} = 11$.

1-й этап: возведение обеих частей уравнения в квадрат (то есть во 2-ю степень).

$$\left(\sqrt{\frac{2x+53}{7}}\right)^2 = 11^2$$

$$\frac{2x+53}{7} = 121$$

$$2x + 53 = 121 \cdot 7 = 847$$

$$2x = 847 - 53 = 794$$

$$x = 794/2 = 397$$

2-й этап: проверить полученный корень (корни).

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 397 + 53}{7}} = \sqrt{\frac{847}{7}} = \sqrt{121} = 11$$

Именно так и должна выполняться качественная проверка полученного результата.

То есть «по-взрослому» ☺!

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

3	9	7					
---	---	---	--	--	--	--	--

В3.6. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{5x-34}} = \frac{1}{11}$.

1-й этап: возведение обеих частей уравнения в квадрат (то есть во 2-ю степень).

$$\left(\sqrt{\frac{6}{5x-34}}\right)^2 = \left(\frac{1}{11}\right)^2$$

$$\frac{6}{5x-34} = \frac{1}{121}$$

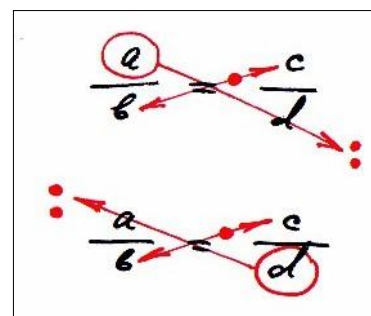


Рисунок 3.1

ПРИМЕЧАНИЕ. Для дальнейшего преобразования такого рода заданий В3 можно воспользоваться известным приемом, который показан на рис. 3.1.

В пропорции (то есть равенстве вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$) любое из входящих в нее чисел удобно находить именно таким способом, который будет пояснен ниже.

В нашем примере

$$5x - 34 = \frac{6 \cdot 121}{1} = 726$$

$$5x = 726 + 34 = 760$$

$$x = 760/5 = 152$$

2-й этап: проверить полученный корень (корни).

Все вычисления этого этапа выполняем, не глядя на вычисления, сделанные ранее!

$$\sqrt{\frac{6}{5 \cdot 152 - 34}} = \sqrt{\frac{1}{121}} = \frac{1}{11}$$

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

1	5	2					
---	---	---	--	--	--	--	--

И еще один пример – решения уравнения с корнем 3-й степени.

В3.7. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-2} = 5$.

1-й этап: возведение обеих частей уравнения в 3-ю степень.

Именно так: раз в уравнении корень 3-й степени, то в нее и нужно возводить.

$$(\sqrt[3]{x-2})^3 = 5^3$$

$$x - 2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$x = 125 + 2 = 127$$

2-й этап: проверить полученный корень (корни).

$$\sqrt[3]{127-2} = \sqrt[3]{125} = 5$$

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

1	2	7					
---	---	---	--	--	--	--	--

Вот так, «совсем не больно» и решаются уравнения с корнем в заданиях В3.

И теперь остается лишь немного поболтать о так называемых логарифмах (умный вид приветствуется!), и связанных с ними уравнениях на предстоящем ЕГЭ.

Логарифмические уравнения

Для того, кто не хочет (или по разным причинам не может) досконально разбираться, что такое логарифмы, можно предложить такую систему работы.

Во-первых, прочитать Отступление №2. И «тупо заучить» упомянутые там формулы их многократным написанием, не особо задумываясь над их происхождением.

Во-вторых, разобраться с приведенными примерами решения логарифмических уравнений, после чего самостоятельно решить как можно больше подобных уравнений по предложенной схеме.

А если ковыряться в теории совсем уж лень – тогда можно попробовать ограничиться только внимательным (!) разбором примеров. Может быть, хватит и этого.

Отступление №2: «немного о логарифмах»

Логарифмы – что это?

В математике придумано много странных вещей. И среди них – так называемые «логарифмы». Логарифмы – это обыкновенные числа, которые записываются не привычными цифрами, а странным, зашифрованным способом. То есть: число прямо не называется (например: 1, 2, 3, -1, -2, -3), а «кодируется» с помощью специальной записи. Запись эта выглядит так: буквы «log», после них два числа – одно мелким шрифтом и снизу (подстрочное), второе – справа от первого и обычного размера.

Например: $\log_2 16$, $\log_5 25$, $\log_{\frac{1}{2}} 8$ и так далее.

Как только что говорилось, каждая из этих записей, начинающихся с буквами «log» – это определенное число. Значение некоторых логарифмов можно найти («расшифровать»).

Или совсем легко, или с небольшими усилиями.

Самый простой способ это сделать – применить прием, который для простоты назовем «**крутилкой**» (рис. 3.2), смысл которой будет понятен из примеров.

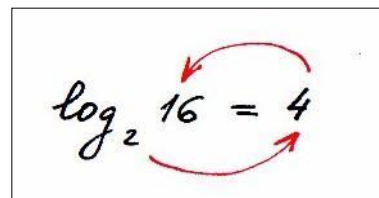


Рисунок 3.2

ПРИМЕР 1: $\log_2 16 = x$.

«Крутилка», которая изображается в виде 2-х стрелок, создающих впечатление некоего вращения, обозначает следующее: $2^x = 16$. Значение x можно легко подобрать – это число «4» (так как $2^4 = 16$). Таким образом, $\log_2 16 = 4$.

ПРИМЕР 2: $\log_5 25 = x$.

Опять «расшифровка» этого числа выполняется тем же способом: $5^x = 25$. Очевидно, что $x = 2$, значит $\log_5 25 = 2$.

ПРИМЕР 3: $\log_{\frac{1}{2}} 8 = x.$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$ – а здесь случай немного сложнее, так как нужно будет решить показательное уравнение.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = 8 = 2^3$$

$$2^{-x} = 2^3$$

$$-x = 3$$

$$x = -3. \quad \text{Таким образом, } \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3. \text{ То есть } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8.$$

ПРИМЕР 4: $\log_{27} 3 = x.$

$$27^x = 3$$

$$(3^3)^x = 3^1$$

$$3^{3x} = 3^1$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}. \quad \text{Таким образом, } \log_{27} 3 = \frac{1}{3}.$$

ПРИМЕР 5: $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49} = x.$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x = \frac{1}{49} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$$

$$x = 2. \quad \text{Таким образом, } \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49} = 2.$$

Выше были специально подобраны такие логарифмы, значения которых находятся довольно легко. И эти найденные значения имеют простой вид – целые числа или простые дроби.

Но можно придумать или найти примеры таких логарифмов, значения которых невозможно вычислить «вручную».

ПРИМЕР 6: $\log_2 5 = x.$

$$2^x = 5 - \text{в этом примере нельзя подобрать значение } x.$$

Ясно только, что $2 < x < 3$ (так как $2^2 = 4$ – «недолет», а $2^3 = 8$ – «перелет»).

Нельзя вычислить x и решением показательного уравнения (как в Примерах 3,4,5), поскольку обе части уравнения $2^x = 5$ невозможно привести к **одинаковому** основанию.

В подобных случаях эти числа именно так окончательно и записывают – не называя прямо их значения: $\log_2 5, \log_3 7, \log_3 7$.

И такая запись означает:

$\log_2 5$ – «та степень, в которую нужно возвести 2, чтобы получить 5»,

$\log_4 52$ – «та степень, в которую нужно возвести 4, чтобы получить 52», и так далее.

Логарифмы: «инструкция по применению»

Этот блок Отступления окажется, в некотором смысле, сложнее предыдущего, потому что его недостаточно только прочитать. Его, как говорилось ранее, нужно «тупо заучить». Но не просто глядя на него – так не получится, а написав по памяти много раз (да знаю, знаю как не хочется это делать ☺).

Может возникнуть вопрос – а почему именно тупо заучить, а может лучше разобраться с этим как следует? А потому – что так сделать проще! Если вы еще не разобрались с этим, учась в школе – сейчас уже некогда. А может быть, и незачем.

А теперь перейдем к тем самым формулам, которые предстоит запомнить. Набор этих формул можно назвать **«логарифмическим конструктором»**, потому что они похожи на набор инструментов для работы с логарифмами. С помощью этого «конструктора» с ними и производятся перечисленные ниже действия (и только они!). Подобно этому, можно говорить и о **«показательном конструкторе»**, с помощью которого работают с числами, возведенными в степень.

Итак, с логарифмами, с этими забавными «зашифрованными» числами, можно выполнять следующие действия:

$$1. \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$2. \log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$3. \log_a x^p = p \log_a x = \log_a x^p$$

$$4. \log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x = \log_a^p x.$$

ПРИМЕЧАНИЕ:

- а) На самом деле существуют и другие формулы «конструктора», но в заданиях В3 они вряд ли могут встретиться.

б) Кроме этих формул, которые описывают действия над логарифмами, нужно помнить так называемое «**основное логарифмическое тождество**»: $a^{\log_a x} = x$ (например, $3^{\log_3 7} = 7$, $8^{\log_8 23} = 23$ и так далее). Задания на его применение встречаются довольно часто в разделе В7. Поэтому его нужно хорошо зрительно помнить, и уметь распознавать выражения, похожие на него. Подробнее об этом – в разделе В7.

И еще одна особенность логарифмов

И последний момент, которым заканчивается Отступление №2, и который нужно запомнить и автоматически отслеживать при решении этих заданий: «начинка» логарифмов, то есть «большое число справа» всегда должно быть больше нуля (об этом нужно помнить при проверке полученных корней логарифмических уравнений).

Хотя обычно в уравнениях В3 корень только один – и он, понятное дело, не может быть отсечен. Что-то же должно быть записано в ответ!

А теперь, после такой зажигательной и нереально любопытной теории – «долгожданные» примеры логарифмических уравнений ☺.

Примеры решения логарифмических уравнений



В3.8. Найдите корень уравнения $\log_5(12 - 3x) = 2 + \log_5 3$.

Решение подобных уравнений удобно разбивать на следующие этапы.

1-й этап: привести уравнение к виду $\log_a f(x) = \text{число}$.

$$\log_5(12 - 3x) - \log_5 3 = 2$$

$$\log_5 \frac{(12 - 3x)}{3} = 2$$

(для преобразования использовалась формула 2 «конструктора»).

2-й этап: применить «крутилку» и найти значение x .

$$5^2 = \frac{(12 - 3x)}{3}$$

$$25 = \frac{(12 - 3x)}{3}$$

$$12 - 3x = 75$$

$$3x = -63$$

$$x = -21$$

А на вопрос «правильно ли то, что мы нашли?», отвечает 3-й этап.

3-й этап: проверка правильности корня.

$$\log_5(12 - 3 \cdot (-21)) = \log_5(12 + 63) = \log_5 75 - \text{правильно.}$$

Причем, при $x = -21$ "начинка" левой части исходного уравнения больше нуля (как и должно быть).

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

-	2	1					
---	---	---	--	--	--	--	--

В3.9. Найдите корень уравнения $\log_2(6 - x) = 4$.

1-й этап: привести уравнение к виду $\log_a f(x) = \text{число}$.

Исходное уравнение уже имеет нужный вид.

2-й этап: применить «крутилку» и найти значение x .

$$2^4 = 6 - x$$

$$x = 6 - 16 = -10.$$

3-й этап: проверка правильности корня.

$$\log_2(6 - (-10)) = 4$$

$$\log_2 16 = 4. \text{ Правильно.}$$

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

-	1	0					
---	---	---	--	--	--	--	--

В3.10. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{4}}(12 - x) = -3$.

1-й этап: привести уравнение к виду $\log_a f(x) = \text{число}$.

Исходное уравнение уже имеет нужный вид.

2-й этап: применить «крутилку» и найти значение x .

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 12 - x$$

С учетом того, что $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 1 / \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4^3 = 64$, запишем предыдущее уравнение так:

$$12 - x = 64$$

$$x = 12 - 64 = -52.$$

3-й этап: проверка правильности корня.

$$\log_{\frac{1}{4}}(12 - (-52)) = \log_{\frac{1}{4}} 64 = \log_{4^{-1}} 4^3 = -1 \cdot 3 \log_4 4 = -3.$$

При $x = -52$ левая часть уравнения больше нуля (так и должно быть). Корень подходит.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

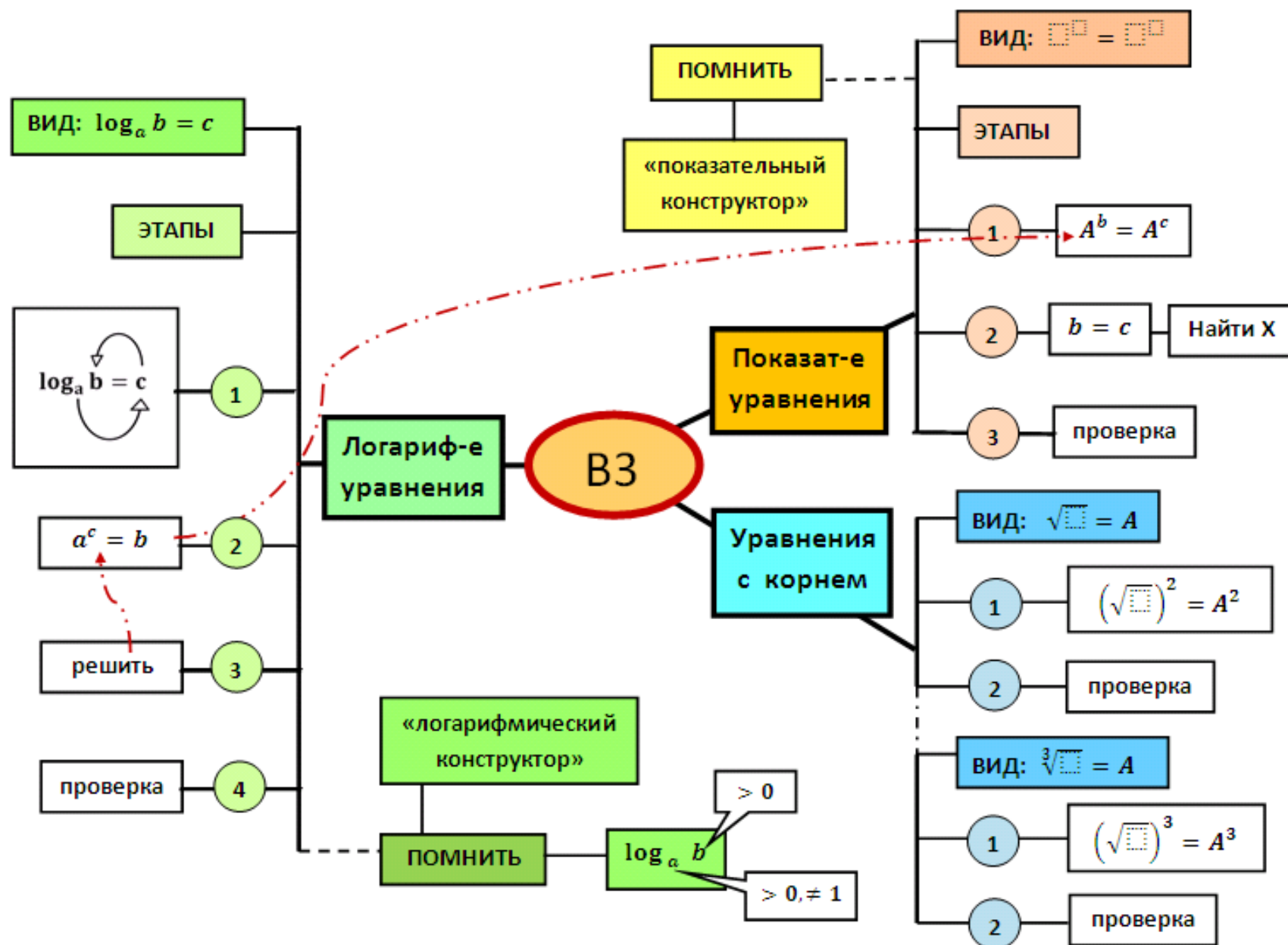
-	5	2					
---	---	---	--	--	--	--	--

Думаю, что приведенных примеров будет достаточно для успешного освоения заданий В3. Тем более, что эта глава получилась и так вынужденно большая.

Ее краткий конспект представлен на следующей странице.

Как всегда, для самостоятельного «набивания руки» воспользуйтесь

[«Открытым банком заданий по математике»](#).



ЕГЭ-2011: Задание В4

Задания В4 – это одно из немногих мест части В экзамена, где встречаются элементы тригонометрии и планиметрии («плоской геометрии»).

Как правило, эти задания довольно однотипны и просты, и при минимальной подготовке к ним не вызывают больших трудностей. Хотя, понятное дело, могут случиться и некоторые неожиданности.

Минимальный объем сведений, который позволяет успешно решать большинство типовых заданий, сейчас будет представлен в очередном тематическом Отступлении.

Отступление №3: «Азбука тригонометрии»

- 1) С большой вероятностью можно ожидать, что большинство заданий В4 будет связано с **прямоугольным треугольником**. А для их решения понадобится так называемая **«теорема Пифагора»**. Ее суть состоит в том, что в любом прямоугольном треугольнике его стороны связаны следующим соотношением: $c^2 = a^2 + b^2$ (рис. 4а).

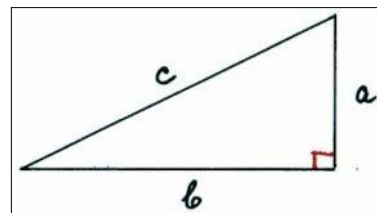


Рисунок 4а

В этой формуле длина гипотенузы обозначена буквой c , а катеты – буквами a и b .

- 2) Во многих заданиях упоминаются **тригонометрические функции**: синус, косинус, тангенс, котангенс. Не обсуждая подробно многие моменты, связанные с этими функциями, ограничимся только самым необходимым. А именно: все эти функции можно определить как отношения длин сторон в прямоугольном треугольнике.

В качестве иллюстрации рассмотрим некоторый наугад нарисованный прямоугольный треугольник (рис. 4б). И смысл тригонометрических функций поясним на примере угла A .

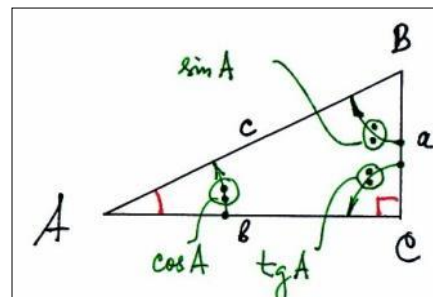


Рисунок 4б

Тригонометрические функции, которые являются отношением определенных двух сторон прямоугольного треугольника, показаны стрелками.

Итак, $\sin A = a/c$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе),

$$\cos A = b/c \text{ (отношение прилежащего катета к гипотенузе),}$$

$$\operatorname{tg} A = a/b \text{ (отношение прилежащего катета к противолежащему),}$$

$$\operatorname{ctg} A = b/a \text{ (отношение противолежащего катета к прилежащему).}$$

Прилежащим называется катет, который «прилежит», то есть «находится рядом» с рассматриваемым углом. Противолежащим – катет, находящийся

«напротив» угла.

Если буквенные обозначения сторон сделать другими, то это приведет только к другой записи тригонометрических функций. А отношение сторон будет тем же самым.

Помимо этой информации, полезно помнить, что тангенс и котангенс угла можно выразить не только через отношения сторон треугольника, но и через синус и косинус этого же угла.

А именно: $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$.

- 3) В большинстве задач упоминаются значения тригонометрических функций углов 30° , 45° или 60° . И их, естественно, нужно помнить. А чтобы их «было откуда запомнить» без листания справочников, приведем таблицу этих значений.

функция	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos \alpha$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\operatorname{tg} \alpha$	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$

- 4) Не очень часто, но порой приходится пользоваться известным соотношением $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ («основное тригонометрическое тождество»).

Обычно эта формула используется для выражения из нее синуса или косинуса. Если это проделать, то получится следующее:

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - (\cos x)^2}$$

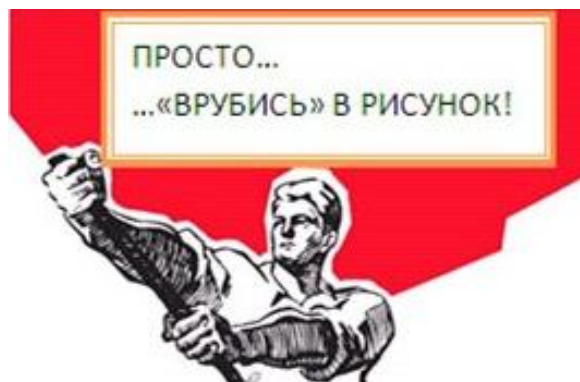
$$\cos x = \pm \sqrt{1 - (\sin x)^2}.$$

В большинстве заданий В4 (в которых, как правило, идет работа с острыми углами треугольника) синус и косинус будут положительны. Но изредка встречаются тупые углы с величиной $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, у которых значения синуса отрицательно, а косинус положителен.

- 5) Как вы, наверное, заметили, «под знаком» тригонометрической функции стоит угол, который может быть обозначен разными способами: A , α , x , y и так далее.

На этом можно и закончить это Отступление, такое краткое и почти приятное по сравнению с предыдущим ☺, и перейти к разбору примеров.

Примеры решения заданий В4



В4.1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол B равен 30° , $BC = 3\sqrt{3}$.

Найдите AC.

Для наиболее комфортного решения подобных заданий, можно предложить следующий порядок действий.

1-этап: работа с рисунком.

На этом этапе нужно нанести на исходный рисунок все то, что дано в условии + то, что нужно найти.

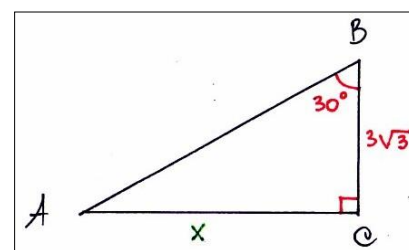


Рисунок 4.1

Рекомендую использовать для этого разные цвета (которые очень «оживляют» рисунок и делают его по-настоящему понятным и полезным для работы).

Для приведенного примера рисунок может быть, например, таким (рис. 4.1).

2-й этап: поиск на рисунке «зацепки» для последующего решения (или использование какого-нибудь типового приема).

В нашем примере видно, что «участвовать» в решении будут угол B, стороны **BC** и **AC** (которые либо уже даны, либо отыскиваются).

Очевидно, лучше всего выбрать такой сценарий:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (табличное значение!)},$$

$$x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$$

3-й этап: проверка полученного результата (не бросаться же сразу записывать «3» в бланк ответов!).

В данном случае, лучше всего решить задание заново, не подсматривая в первоначальный вариант. А перед этим – еще раз проверить правильность записи того, что дано в условии.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

3							
---	--	--	--	--	--	--	--

Хорошо, если бы именно такое легкое задание попало на ЕГЭ!

В4.2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos B = \frac{3}{5}$, $AB = 5$. Найдите AC.

1-этап: работа с рисунком.

Рисунок может, например, получиться таким (рис. 4.2).

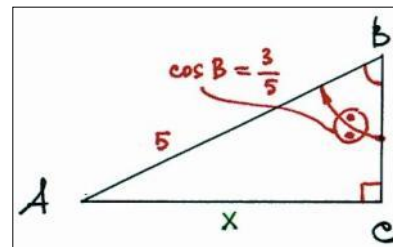


Рисунок 4.2

На этом, и нескольких других примерах, можно показать применение простого и эффективного типового приема решения подобных заданий. Его можно назвать «Связкой», так как одновременно используются два соображения.

Первое: раз треугольник прямоугольный, то можно использовать теорему Пифагора.

Второе: раз в условии дано значение тригонометрической функции (или его нужно найти), то ее нужно расписать через отношение сторон данного в условии треугольника.

В этом примере «Связка» будет выглядеть так:

$$\cos B = \frac{3}{5} = \frac{BC}{AB}, \quad (1)$$

$$5^2 = x^2 + BC^2 \quad (2)$$

Итак, «Связка» записана. Далее можно использовать, например, такой «план действий»: из (1) найти BC и подставить в (2).

$$BC = \frac{3 \times 5}{5} = 3,$$

$$5^2 = x^2 + 3^2$$

$$x^2 = 25 - 9 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

По смыслу задания подходит только $x = 4$.

3-й этап: проверка полученного результата.

Рецепт по проверке ответа тот же, что и в предыдущем задании.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

4							
---	--	--	--	--	--	--	--

В4.3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 30$, $AC = 6\sqrt{21}$.

Найдите $\sin A$.

1-этап: работа с рисунком (рис. 4.3).

2-й этап: решение, следующее из рассмотрения рисунка.

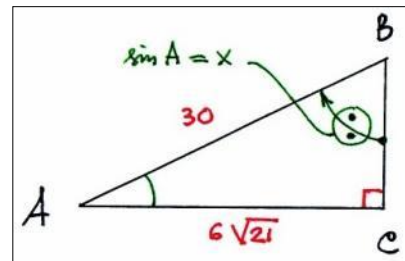


Рисунок 4.3

Применим знакомую «Связку»:

$$x = \sin A = \frac{BC}{30}, \quad \text{то есть } x = \frac{BC}{30} \quad (1)$$

$$30^2 = (6\sqrt{21})^2 + BC^2 \quad (2)$$

После записи «Связки» начинаем думать о дальнейших действиях. Естественно, напрашивается такой вариант: из (2) найти BC и подставить в (1). Итак,

$$BC^2 = 30^2 - 36 \times 21 = 900 - 756 = 144$$

$$BC = \pm\sqrt{144} = \pm 12. \quad \text{Оставляем } BC = 12.$$

$$x = \frac{12}{30} = \frac{4}{10} = 0,4$$

3-й этап: проверка полученного результата.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

0	,	4					
---	---	---	--	--	--	--	--

В4.4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 182$, $AC = 70$.

Найдите $\operatorname{tg} A$.

1-этап: работа с рисунком (рис. 4.4).

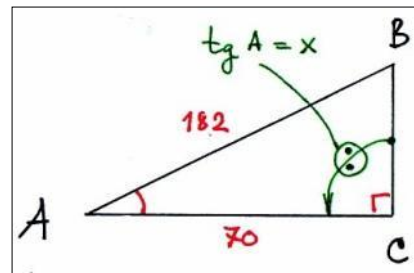


Рисунок 4.4

2-й этап: решение, находимое из рассмотрения рисунка.

$$\operatorname{tg} A = x = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{70}, \text{ то есть } x = \frac{BC}{70} \quad (1)$$

$$182^2 = 70^2 + BC^2 \quad (2)$$

Глядя на «Связку», можно предложить два варианта решения.

Вариант А: из (2) найти BC и подставить в (1).

Вариант В: из (1) выразить BC и подставить в (2).

Для показа возможных различий в решении рассмотрим оба варианта.

ВАРИАНТ А.

$$BC^2 = 182^2 - 70^2 = (182 - 70)(182 + 70) = 112 \times 252 = 28224.$$

Вау! – скажет читатель. И из этого числа еще нужно как-то найти корень!?

Чтобы тупо не перебирать числа подряд, попробуем поразмышлять.

С одной стороны, $70 < BC < 182$. Очевидно, что $70 < BC$, так как $70^2 < BC^2$.

С другой стороны, понятно, что $BC > 100$

(так как $100^2 = 10000$, а нам надо получить 28224!).

Проведем грубую прикидку:

$$150^2 = 22500, \quad 160^2 = 25600, \quad 170^2 = 28900.$$

Значит, BC больше 160, но меньше 170.

Теперь нужно найти его третью, последнюю цифру. Для того, чтобы получить 4 в конце искомого числа, последнюю цифру должна быть или 2 ($2 \times 2 = 4$), или 8 ($8 \times 8 = 64$).

Проверяем: $162^2 = 26244$ (недолет ☹), $168^2 = 28224$ (то, что надо!).

Итак, BC найдено, теперь осталось вычислить x: $x = \frac{168}{70} = 2,4$.

Уффф! Не знаю как вы, а я уже устал! Но второй вариант все же посмотрим.

ВАРИАНТ В.

Подставим $BC = 70x$ в (2), и решим полученное уравнение.

$$182^2 = 70^2 + (70x)^2 = 70^2 + 70^2 x^2$$

$$182^2 = 70^2(1 + x^2)$$

$$1 + x^2 = \frac{182^2}{70^2} = \frac{182 \times 182}{70 \times 70} = \frac{91 \times 91}{35 \times 35} = \frac{13 \times 13}{5 \times 5} = \frac{169}{25}$$

$$x^2 = \frac{169}{25} - 1 = \frac{169}{25} - \frac{25}{25} = \frac{144}{25}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{144}{25}} = \pm \frac{12}{5} = \pm 2,4$$

Оставляем $x = 2,4$ как единственно пригодное число.

Вариант В оказался проще – меньше возни с цифрами, но и вариант А при желании одолеть можно!

Кстати, очень многие задания можно решить более чем одним способом. Поэтому не нужно судорожно пытаться запомнить какие-то особые рецепты под каждое конкретное задание.

Рисунок, здравый смысл, проверка сделанного и отсутствие спешки всегда выводят на нужный путь!

3-й этап: проверка полученного результата.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

2	,	4					
---	---	---	--	--	--	--	--

В4.5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 30$, $BC = 24$.

Найдите $\cos A$.

1-этап: работа с рисунком (рис. 4.5).

2-й этап: решение, находимое из рассмотрения рисунка.

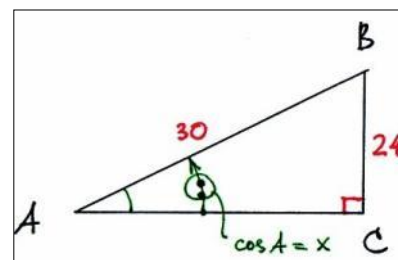


Рисунок 4.5

$$x = \cos A = \frac{AC}{30}, \quad \text{то есть } x = \frac{AC}{30} \quad (1)$$

$$30^2 = 24^2 + AC^2 \quad (2)$$

Этот пример напоминает предыдущий, но его мы решим только одним способом: выразим из (1) AC и подставим в (2). На два способа я уже не согласен ☺!

$$30^2 = 24^2 + (30x)^2 = 24^2 + 30^2 x^2$$

$$30^2 x^2 = 30^2 - 24^2$$

$$x^2 = \frac{30^2 - 24^2}{30^2} = \frac{900 - 676}{900} = \frac{324}{900} = \frac{108}{300} = \frac{36}{100}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{36}{100}} = \pm \frac{6}{10} = \pm 0,6$$

Оставляем $x = 0,6$.

3-й этап: проверка полученного результата.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

0	,	6					
---	---	---	--	--	--	--	--

В4.6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите $\sin B$.

1-этап: работа с рисунком (рис. 4.6).

2-й этап: решение, находящее из рассмотрения рисунка.

Из рисунка видно, что искомый $\sin B$ равен $\cos A$,

который уже дан в условии. Таким образом,

$$\sin B = \cos A = \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10} = 0,8$$

Этот пример можно назвать задачей – провокацией.

Она оказалась проще, чем можно было предположить.

3-й этап: проверка полученного результата.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

0	,	8					
---	---	---	--	--	--	--	--

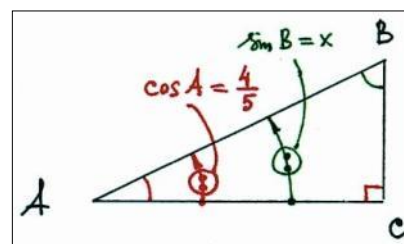


Рисунок 4.6

В4.7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° .

Найдите синус угла BAD.

1-этап: работа с рисунком (рис. 4.7а).

2-й этап: решение, находящее из рассмотрения рисунка.

Из рисунка видно, что $\angle BAD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению значения $\sin 150^\circ$.

Можно предложить два относительно простых способа найти эту величину. Подробно пояснять эти способы сейчас нет возможности – не тот формат книжки.

Если расписывать все, что нуждается в подробном пояснении, то получится ощутимо более тяжелое чтение! И любой «чайник» от него отвернется со справедливым негодованием ☹.

Итак, эти способы.

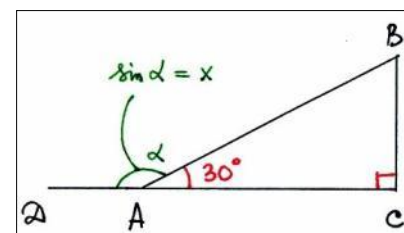


Рисунок 4.7а

- 1) Применим так называемую «формулу приведения»:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Или ее же, но в другом виде:

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Естественно, результат получится тем же.

- 2) Если читатель понимает (или просто откуда-то помнит ☺), что синус угла равен вертикальной координате вращаемой на единичной окружности точки, то станет понятно следующее:

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 0,5.$$

Этот факт изображен на рис. 4.76.

3-й этап: проверка полученного результата.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

0	,	5					
---	---	---	--	--	--	--	--

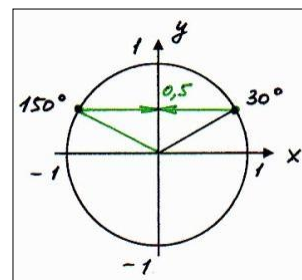


Рисунок 4.76

В4.8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 5, а высота, проведенная к основанию, равна $2\sqrt{6}$.

Найдите косинус угла A.

1-этап: работа с рисунком (рис. 4.8).

2-й этап: решение, находящее из рассмотрения рисунка.

Предложенную задачу можно решить по крайней мере двумя способами.

1-й СПОСОБ.

$$\cos A = \frac{AO}{AB} = \frac{AO}{5}$$

По теореме Пифагора для треугольника AOB: $AO^2 = AB^2 - BO^2$

$$AO^2 = 5^2 - (2\sqrt{6})^2 = 25 - 24 = 1$$

$$AO = \sqrt{1} = 1$$

Таким образом,

$$\cos A = \frac{1}{5} = 0,2$$

2-й СПОСОБ.

$$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

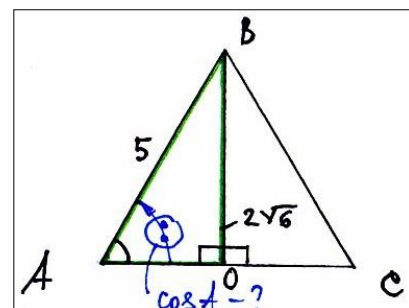


Рисунок 4.8

$$(\cos A)^2 = 1 - (\sin A)^2 = 1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25}$$

$$\cos A = \pm \sqrt{\frac{1}{25}}.$$

Выбираем $\cos A = +\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} = 0,2$ (косинус острого угла положителен).

3-й этап: проверка полученного результата.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

0	,	2					
---	---	---	--	--	--	--	--

В4.9. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 8$, $\operatorname{tg} A = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Найдите BC.

1-этап: работа с рисунком (рис. 4.9).

2-й этап: решение, находимое из рассмотрения рисунка.

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{\sqrt{8^2 - x^2}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

По свойству пропорции (см. рис. 3.1):

$$7x = 3\sqrt{7(64 - x^2)}$$

Найдем x из этого уравнения:

$$49x^2 = 9 \cdot 7(64 - x^2)$$

$$16x^2 = 576$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

Выбираем, естественно,

$$x = 6.$$

3-й этап: проверка полученного результата.

$$\operatorname{tg} A = \frac{x}{AC} = \frac{6}{\sqrt{8^2 - 6^2}} = \frac{6}{\sqrt{28}} = \frac{6}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

6							
---	--	--	--	--	--	--	--

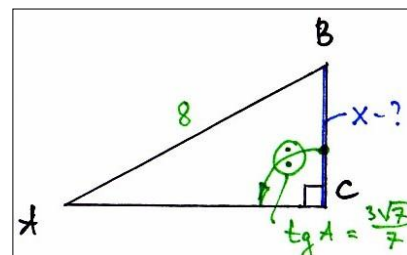


Рисунок 4.9

А теперь, в качестве развлечения после долгих трудов, рассмотрим что-нибудь совсем легкое.

В4.10. Один острый угол прямоугольного треугольника на 30° больше другого. Найдите больший острый угол.

1-этап: работа с рисунком (рис. 4.10).

2-й этап: решение, находимое из рассмотрения рисунка.

Сумма углов любого треугольника равна 180° .

Применительно к нашему случаю это означает, что

$$x + (x + 30) + 90 = 180$$

$$2x + 120 = 180$$

$$2x = 60$$

$$x = 30$$

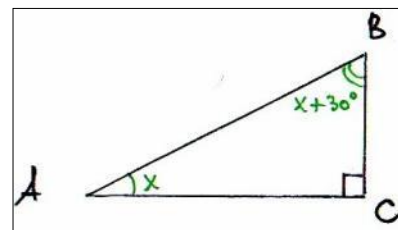


Рисунок 4.10

Таким образом, меньший угол равен 30° . Тогда больший угол равен $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

3-й этап: проверка полученного результата.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

6	0						
---	---	--	--	--	--	--	--

Желаю вам на ЕГЭ именно такого – легкого – задания В3!

Все предыдущие задачи объединяло наличие рисунка. Можно сказать, что они были «из геометрии». Вместе с тем (судя по различной ЕГЭ – литературе, выпущенной в этом году) возможны задания и «из чистой тригонометрии».

Будет, наверное, полезно посмотреть и на них.

А для того, чтобы успешно справляться с ними, необходимо помнить следующее:

- 1) Таблицу значений тригонометрических функций для острых углов;
- 2) Основное тригонометрическое тождество (см. Отступление №3);
- 3) Правила работы с формулами приведения.

Если первые пункты списка уже «закрыты» ранее, то третий, как показывает практика, все же требует разъяснения, для которого мы временно и уходим на очередное тематическое Отступление.

Отступление №4: «формулы приведения»

Эти формулы называются так потому, что позволяют выразить (заменить) тригонометрические функции «особых» углов 2 – 4 четвертей через известные табличные значения «особых» углов 1 четверти. То есть «привести» их к уже знакомым цифрам для углов 30° , 45° , 60° .

Формулы приведения – часто используемый в учебных заданиях инструмент работы с тригонометрическими функциями углов больше 90° .

Формулы приведения могут быть сведены к двум **Правилам**, которые, для простоты, лучше объяснить на конкретных примерах.

ПРИМЕР 1. Требуется найти $\sin 150^\circ$.

Угол 150° можно получить как от ближайшей горизонтальной оси ($180^\circ - 30^\circ$), так и от ближайшей вертикальной ($90^\circ + 60^\circ$).

Правило №1 утверждает (рис. 4в):

если угол образован от *горизонтали* ($0^\circ = 360^\circ$ или $\pm 180^\circ$), то название «приводимой» функции не изменяется, а первоначальный угол заменяется на прибавляемый (вычитаемый).

В нашем примере

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2.$$

Если же угол образован от *вертикали* ($\pm 90^\circ$ или $\pm 270^\circ$), то название «приводимой» функции изменится на противоположное (синус на косинус, тангенс на котангенс и так далее).

В нашем примере $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = 1/2$.

Правило №2 устанавливает *знак* полученной функции:

он будет таким же, как у исходной, «приводимой» функции.

В нашем примере $\sin 150^\circ > 0$, значит и $\sin 30^\circ$ и $\cos 60^\circ$ будут иметь знак «+».

ПРИМЕР 2. Требуется найти $\cos 600^\circ$.

Угол 600° соответствует второму обороту вокруг окружности. В этом случае нужно отнять от 400° наибольшее целое число полных оборотов, то есть, в нашем случае 360° .

После этого мы получим угол 240° , совпадающий на окружности с углом 400° .

Учтем, что $\cos 240^\circ < 0$.

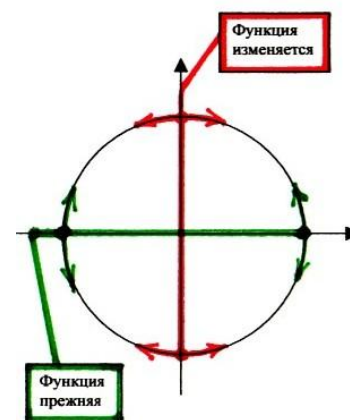


Рис. 4в

Итак, $\cos 600^\circ = \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -1/2$

или, в другом варианте

$$\cos 600^\circ = \cos 240^\circ = \cos(270^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2,$$

что приводит к тому же ответу.

ПРИМЕР 3. Требуется найти $\operatorname{tg} 225^\circ$.

На единичной окружности видно, что $\sin 225^\circ < 0^\circ$ и $\cos 225^\circ < 0^\circ$, следовательно,

$$\operatorname{tg} 225^\circ = \sin 225^\circ / \cos 225^\circ > 0^\circ.$$

Если угол образовать от горизонтали, то $\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = +\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Если же угол образовать от вертикали, то $\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(270^\circ - 45^\circ) = +\cos 45^\circ = 1$.

ПРИМЕР 4. Требуется найти $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6}$.

Если угол дан в радианах, то часто удобнее сначала перевести его в градусы, а затем выполнить уже привычные вычисления. Перевод в градусы проще всего сделать с так:

$$\frac{11\pi}{6} = \frac{11 \cdot 180^\circ}{6} = 11 \cdot 30^\circ = 330^\circ$$

Таким образом, исходный угол равен 330° , а знак искомого выражения

$$\operatorname{ctg} 330^\circ = \cos 330^\circ / \sin 330^\circ < 0.$$

$$\operatorname{ctg} 330^\circ = \operatorname{ctg}(360^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3} \text{ или}$$

$$\operatorname{ctg} 330^\circ = \operatorname{ctg}(270^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

А теперь, после живительного перерыва на Отступление №4, переходим к обещанным примерам «из чистой тригонометрии», ради которых и нажималось столько лишних кнопочек на «клаве» ☺.

В4.11. Вычислите значение выражения $12 \cdot (\sin \alpha)^2$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$.

Подобные задания можно решать, по крайней мере, двумя способами.

1-й СПОСОБ.

1-этап: решение.

Раз в условии упомянут котангенс, распишем его через синус и косинус:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{3}$$

$$(\operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{(\cos \alpha)^2}{(\sin \alpha)^2} = 3$$

$$\frac{1 - (\sin \alpha)^2}{(\sin \alpha)^2} = 3$$

$$3(\sin \alpha)^2 = 1 - (\sin \alpha)^2$$

$$(\sin \alpha)^2 = 1/4$$

А теперь, найдя значение $(\sin \alpha)^2$, легко найдем и значение искомого выражения:

$$12(\sin \alpha)^2 = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3$$

2-й этап: проверка полученного результата.

Можно, например, решить 2-м способом, который будет показан ниже. А можно просто решить все заново, что тоже хорошо.

2-й СПОСОБ.

1-этап: решение.

Если решение первым способом было основано на применении основного тригонометрического тождества, то сейчас мы пойдем другим путем. И для него будет достаточно всего лишь помнить табличные значения тригонометрических функций.

Тогда выстраивается такая цепочка выводов (она понятна и без пояснений):

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 30^\circ \rightarrow \sin \alpha = 1/2 \rightarrow (\sin \alpha)^2 = 1/4 \rightarrow 12(\sin \alpha)^2 = 12/4 = 3$$

2-й этап: проверка полученного результата.

Естественно, что ответ получился таким же самым.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

3							
---	--	--	--	--	--	--	--

В4.12. Вычислите значение выражения $9(\operatorname{tg} \alpha)^2$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1-й СПОСОБ.

1-этап: решение.

Раз в условии упомянут тангенс, распишем его через синус и косинус:

$$(\operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{(\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = \frac{1 - (\cos \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = \frac{1 - 3/4}{3/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

А теперь найдем значение искомого выражения:

$$9(\operatorname{tg} \alpha)^2 = 9 \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{1} \cdot \frac{1}{3} = 3$$

2-й этап: проверка полученного результата.

2-й СПОСОБ.

1-этап: решение.

В этом примере получается такая цепочка выводов:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow (\operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{1}{3} \rightarrow 9(\operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{9}{3} = 3$$

2-й этап: проверка полученного результата.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

3							
---	--	--	--	--	--	--	--

В4.13. Вычислите значение выражения $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4}$.

Ну что ж, наверное может встретиться и такое.

И опять: достаточно помнить табличные значения тригонометрических функций для острых углов и уметь работать с формулами приведения (то есть вычислять эти самые значения для тупых углов).

1-этап: решение.

Итак, таблица нам «говорит», что $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значение $\cos \frac{3\pi}{4}$ найдем по формуле приведения. Причем, для удобства работы,

величину угла можно перевести в градусы (но это не обязательно).

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Вообще говоря, к такому же выводу можно придти, сообразив, что на единичной окружности точки для углов 135° и 45° симметричны относительно оси ОУ. И значит их синусы равны, а косинусы равны по величине, но противоположны по знаку, то есть $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Но такой путь для многих, вероятно, совсем уж непривычен.

Итак, искомое выражение равно

$$\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

2-й этап: проверка полученного результата.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

-	0	,	5				
---	---	---	---	--	--	--	--

И еще одно задание напоследок.

В4.14. Вычислите значение выражения $2\sin(\pi - \alpha) + 3\cos\frac{\pi}{2}$, если $\sin \alpha = 0,4$.

1-этап: решение.

Согласно таблице значений $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, остается только найти $\sin(\pi - \alpha)$. Правила

формул приведения (да и просто рисунок на единичной окружности) утверждают, что $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, а поскольку $\sin \alpha = 0,4$, то ответ, что называется, уже «в кармане».

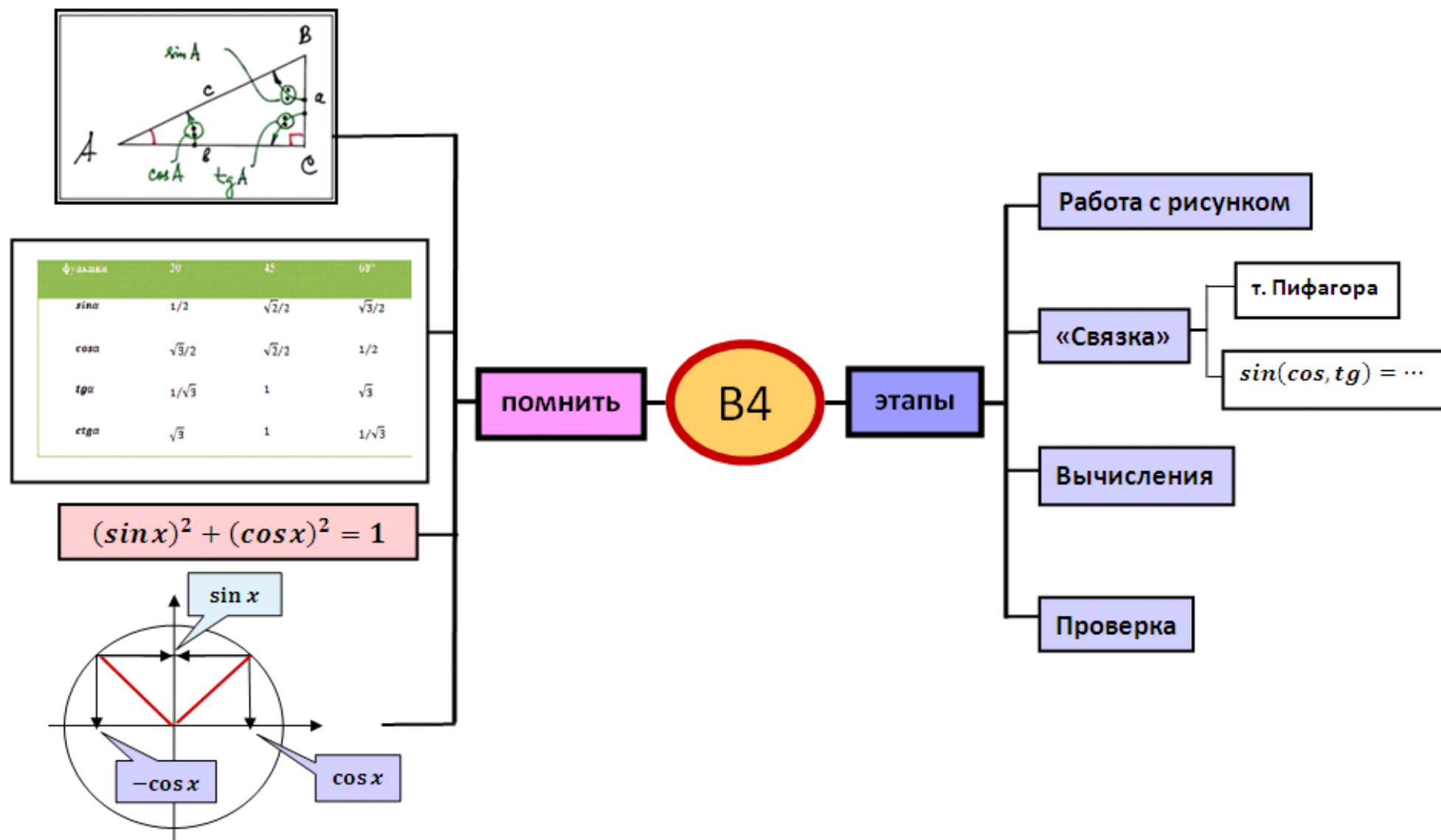
$$2\sin(\pi - \alpha) + 3\cos\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 0,4 + 0 = 0,8$$

2-й этап: проверка полученного результата.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

0	,	8					
---	---	---	--	--	--	--	--

А теперь для закрепления навыков (после просмотра расположенной ниже картинки) все на тренировку в [«Открытый банк заданий по математике»](#) 😊.



ЕГЭ-2011: Задание В5

Задания В5, которые представлены длинными многословными задачами, сначала производят невеселое впечатление – они кажутся сложными.

На самом деле они просто громоздкие и длинные в решении. Кроме того, они требуют внимания в вычислениях.

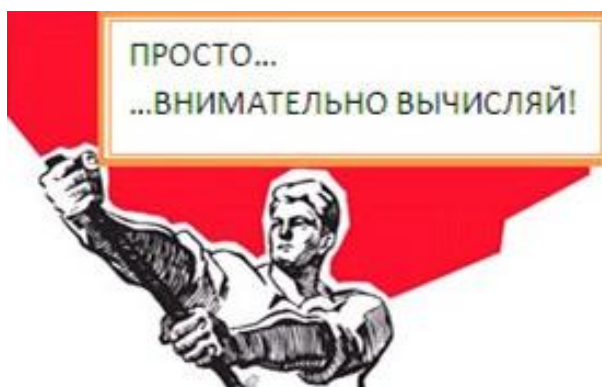
Однако решаются они довольно просто, если к ним правильно подойти.

А этот правильный подход, в свою очередь, сам по себе довольно прост.

А именно: сначала всю информацию из условия нужно перенести на простой рисунок (схему) для хорошего обзора. И уже затем, имея перед собой «отжатую» информацию, проделать вычисления по всем предлагаемым в условии вариантам выбора. Если же рисунок уже имеется, то необходимые пометки можно делать прямо на нем.

Распространенный и такой понятный (лень и отсутствие привычки) соблазн не делать никаких рисунков вообще, а заняться сразу вычислениями, да еще и в уме, часто приводит к закономерному результату: ответ получается «хороший, но неправильный» ☺!

Подход, который мне кажется полезным и вполне работающим, показан в ряде типичных примеров.



В5.1. Из пункта А в пункт D ведут три дороги. Через пункт В едет грузовик со средней скоростью 34 км/ч, через пункт С едет автобус со средней скоростью 58 км/ч. Третья дорога – без промежуточных пунктов, и по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 44 км/ч. На рисунке показана схема дорог и расстояние между пунктами по дорогам. Все три автомобиля одновременно выехали из пункта А. Какой автомобиль добрался до пункта D позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге (рис. 5.1).

1-й этап: нанести все данные из условия на уже имеющийся в задании рисунок.

2-й этап: сделать подробные (!) вычисления для всех перечисленных в задании вариантов.

В нашем примере нужно вычислить время движения по трем маршрутам, используя для этого очевидную формулу $t = s/v$ (а что же еще можно использовать, если путь и скорость даны, а нужно найти время ☺?).

1-маршрут. $t = \frac{52+35}{58} = \frac{87}{58} = 1,5$ (час)

2-маршрут. $t = \frac{99}{44} = 2\frac{11}{44} = 2\frac{1}{4} = 1,25$ (час)

3-маршрут. $t = \frac{34+51}{34} = \frac{85}{34} = 2,5$ (час)

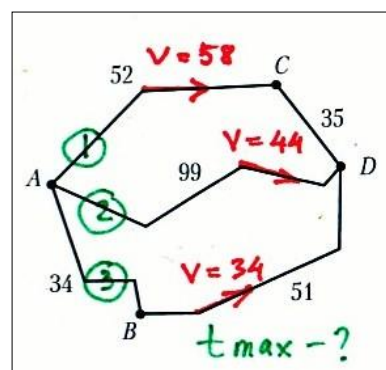


Рисунок 5.1

В этом примере нужно указать наибольшее время движения.

3-й этап: проверить сделанные вычисления.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

2	,	5					
---	---	---	--	--	--	--	--

В5.2. Строительной фирме нужно приобрести 73 кубометра пенобетона. У нее есть 3 поставщика. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой? Цена и условия доставки приведены в таблице (рис. 5.2).

1-й этап: использовать имеющуюся таблицу для вычислений.

В этом конкретном случае все расчеты можно произвести прямо в свободных местах таблицы. Как и во всех других случаях, важно все существенные действия (вычисления чисел, показ каких-либо моментов стрелками и так далее) упорядоченно сделать на бумаге. Это впоследствии облегчит проверку своих действий и снизит вероятность ошибки.

ВСЕГО НУЖНО 73 м³

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м³)	Стоимость доставки в рублях	Дополнительные условия
А	$73 \cdot 2650 = 193450$	$+ 4600 =$	198050
Б	$73 \cdot 3000 = 219000$	$+ 3600 =$	222600 При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	$73 \cdot 2680 = 195640$	$+ 3600 =$	199240 При заказе более 75 м³ доставка бесплатно

Рисунок 5.2

Как видно, самый дешевый вариант покупки предлагает поставщик А: 198050 руб.

2-й этап: проверить сделанные вычисления.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

1	9	8	0	5	0		
---	---	---	---	---	---	--	--

В5.3. Интернет – провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана. Пользователь планирует, что его трафик составит 900 Мб и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей должен заплатить пользователь в месяц, если его трафик действительно будет равен 900 Мб?

1-й этап: составить свою таблицу и произвести вычисления.

А в этом задании, в качестве примера, сделаем свою «схему происходящего». Может получиться, например, следующее (рис. 5.3).

2-й этап: проверить сделанные вычисления.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

Необходимо 900 Мб

Тарифный план	Стоимость	Расчет	Итого
40"	—	$3,5 \cdot 900 = 3150$ р.	3150
700"	750 р.	$(900 - 700) \cdot 3 = 600$ р.	1350
1000"	1050 р.	дополнительно до 900	1050

Рисунок 5.3

1	0	5	0				
---	---	---	---	--	--	--	--

В5.4. Семья из трех человек едет из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно – на своей машине. Билет на поезд стоит 790 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 13 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 19 руб. за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

1-й этап: нарисовать свою схему и произвести вычисления.

Опять же пробуем нарисовать что-нибудь простое и понятное (рис. 5.4).

2-й этап: проверить сделанные вычисления.

3-й этап: внимательно записать ответ.

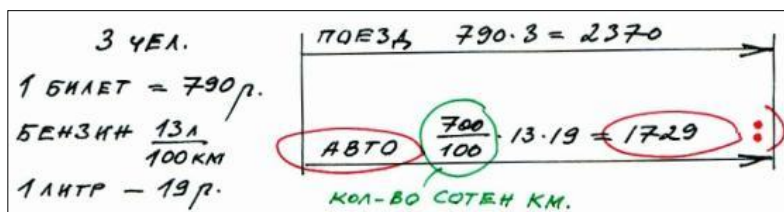


Рисунок 5.4

1	7	2	9				
---	---	---	---	--	--	--	--

В5.5. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяженностью 600 км. В таблице (рис. 5.5а) приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант? Цена дизельного топлива 18 руб. за литр, бензина 21 руб. за литр, газа 17 руб. за литр.

1-й этап: нарисовать свою схему и произвести вычисления.

У меня получился, например, такой вариант (рис. 5.5б).

Автомобиль	Топливо	Расход топлива на 100 км	Арендная плата за 1 сутки
1	Дизельное	4	3500
2	Бензин	7	3100
3	Газ	12	3100

2-й этап: проверить сделанные вычисления.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

Рисунок 5.5а

3	9	3	2				
---	---	---	---	--	--	--	--

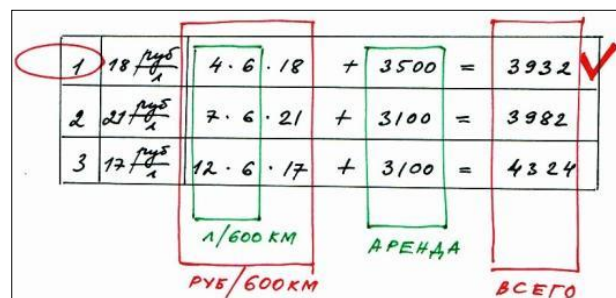


Рисунок 5.5б

В5.6. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 5 кубометров пеноблоков и 2 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 4 тонны щебня и 40 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2400 рублей, щебень стоит 640 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 240 рублей.

Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешевый вариант?

1-й этап: нарисовать свою схему и произвести вычисления.

Получается, например, такой вариант (рис. 5.6).

Из таблицы видно, что стоимость

вариантов строительства такова:

Для бетона

$$40 \cdot 240 + 4 \cdot 640 = 12160$$

Для пеноблоков

$$5 \cdot 2400 + 2 \cdot 240 = 12480$$

Выбираем более дешевый вариант: **12160.**

2-й этап: проверить сделанные вычисления.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

1	2	1	6	0			
---	---	---	---	---	--	--	--

Б		40 т щебня × 240	4 т цемента × 640	12160
П	5 м³ пеноблоков × 2400	2 т цемента × 240		12480

Рисунок 5.6

В5.7. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу?

Ответ дайте в часах (рис. 5.7).

1-й этап: произвести вычисления.

Поскольку в задаче таблица уже дана, достаточно выполнить построчный подсчет времени, переводя его для удобства в минуты.

Получится следующее.

	1	2	3
1. Автобус	От дома до автобусной станции — 20 мин	Автобус в пути 2 ч 5 мин	От остановки автобуса до дачи пешком 10 мин
2. Электричка	От дома до станции железной дороги — 25 мин	Электричка в пути 1 ч 45 мин	От станции до дачи пешком 20 мин
3. Маршрутное такси	От дома до остановки маршрутного такси — 25 мин	Маршрутное такси в дороге 1 ч 35 мин	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 40 мин

Автобус: $20 + 125 + 10 = 155$ (минут)

Электричка: $25 + 105 + 20 = 150$ (минут)

Маршрутка: $25 + 95 + 40 = 160$ (минут)

Рисунок 5.7

Выбираем наименьшее время и переводим его в часы:

$$150 = 2 \cdot 60 + 30 = 2\text{ч } 30\text{ мин} = 2,5\text{час.}$$

2-й этап: проверить сделанные вычисления.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

2	,	5					
---	---	---	--	--	--	--	--

Задания В5, конечно же, могут быть и более разнообразными.

В чем легко можно убедиться, зайдя в [«Открытый банк заданий по математике»](#).

Но общий подход к их решению остается прежним.

ЕГЭ-2011: Задание В6

Суть заданий В6 напоминает некую забаву из начальных классов школы, и сводится к нахождению площади нарисованной фигуры.

Как ни странно, но даже в этом задании существуют несколько способов решения. В том числе – сложные и неудобные. Мы их, естественно, рассматривать не будем, а сразу перейдем к одному простому и универсальному способу. Простым я его называю потому, что вам не потребуется знание формул площадей различных геометрических фигур (кроме площади прямоугольника – что не так уж много). С помощью этого способа легко можно найти площадь абсолютно любой фигуры, предлагаемой на ЕГЭ.



Суть этого способа будет понятна из конкретных примеров.

В6.1. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$.

Ответ дайте в квадратных сантиметрах (рис. 6.1).

1-этап: нарисовать вокруг данной фигуры прямоугольник и отметить «лишние» треугольники («кандидаты на вылет»).

Построим вокруг искомого четырехугольника прямоугольник со сторонами a и b (одна из них должна быть обязательно горизонтальна, другая - вертикальна). Очевидно, что искомая площадь равна площади «зеленого» прямоугольника, за вычетом площадей 4-х лишних одинаковых треугольников.

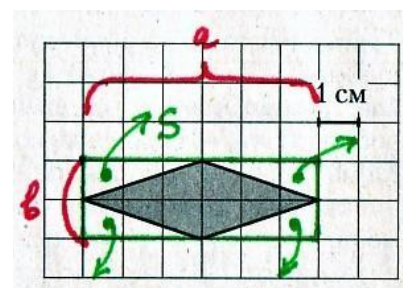


Рисунок 6.1

2-й этап: подробное (!) вычисление площади (на основании рисунка).

$$S = S_{\text{пря}} - 4S = ab - 4S = 2 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} = 12 - 6 = 6$$

На рисунке видно, что площадь каждого из «выброшенных» треугольников равна половине произведения его катетов (в этом примере $S = \frac{1 \cdot 3}{2}$).

3-й этап: дополнительная проверка ответа.

«Вы таки опять будете смеяться!», но даже здесь периодически бывают ошибки. Наиболее правильный путь – решить все заново, не заглядывая в предыдущее решение.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

6							
---	--	--	--	--	--	--	--

В6.2. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см.

Ответ дайте в квадратных сантиметрах (рис. 6.2).

1-этап: нарисовать вокруг данной фигуры прямоугольник и отметить «лишние» треугольники.

2-й этап: подробное (!) вычисление площади (на основании рисунка).

В нашем примере это трапеция, и ее площадь вычислим так:

$$S = S_{\text{пря}} - (S_1 + S_2) = ab - (S_1 + S_2) =$$

$$= 3 \cdot 7 - \left(\frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} \right) = 21 - (9 + 6) = 21 - 15 = 6$$

3-й этап: дополнительная проверка ответа.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

6							
---	--	--	--	--	--	--	--

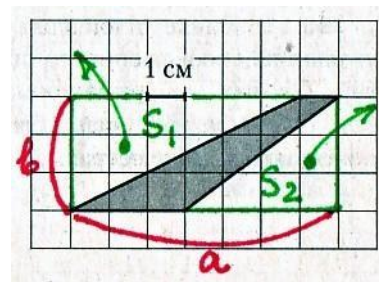


Рисунок 6.2

В6.3. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см.

Ответ дайте в квадратных сантиметрах (рис. 6.3).

1-этап: нарисовать вокруг данной фигуры прямоугольник и отметить «лишние» треугольники.

2-й этап: подробное (!) вычисление площади (на основании рисунка).

$$S = S_{\text{пря}} - (2S_1 + 2S_2) = ab - 2(S_1 + S_2) =$$

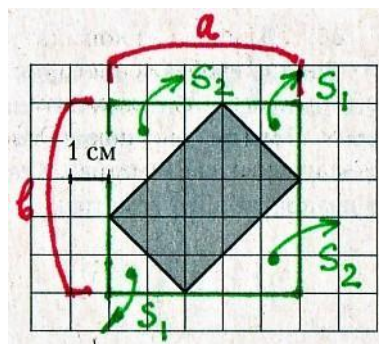


Рисунок 6.3

$$= 5 \cdot 5 - 2 \left(\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} \right) = 25 - 2(2 + 4,5) = 25 - 13 = 12$$

3-й этап: дополнительная проверка ответа.

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

1	2						
---	---	--	--	--	--	--	--

В6.4. Основания равнобедренной трапеции равны 2 и 14, а ее боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.

А в этой задаче нет готового рисунка, поэтому сделаем его сами (рис. 6.4).

1-этап: нарисовать вокруг данной фигуры прямоугольник и отметить «лишние» треугольники.

2-й этап: подробное (!) вычисление площади (на основании рисунка).

$$S = S_{\text{пря}} - 2S = 14y - 2 \left(\frac{6y}{2} \right) = 14y - 6y = 8y$$

По т. Пифагора найдем y из любого заштрихованного треугольника:

$$10^2 = 6^2 + y^2$$

$$y^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$y = \pm 8$$

По смыслу задачи подходит корень $y = 8$.

Таким образом, $S = 8y = 64$.

3-й этап: дополнительная проверка ответа.

В основу проверки можно взять следующий факт: сумма площадей трапеции и 2-х заштрихованных треугольников должна равняться площади всего прямоугольника. Проверим это.

$$8y + 64 = 14y$$

$$48 + 64 = 14 \cdot 8$$

$$112 = 112$$

Все правильно!

4-й этап: внимательно (!) записать ответ.

6	4						
---	---	--	--	--	--	--	--

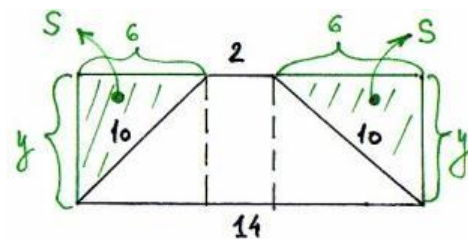


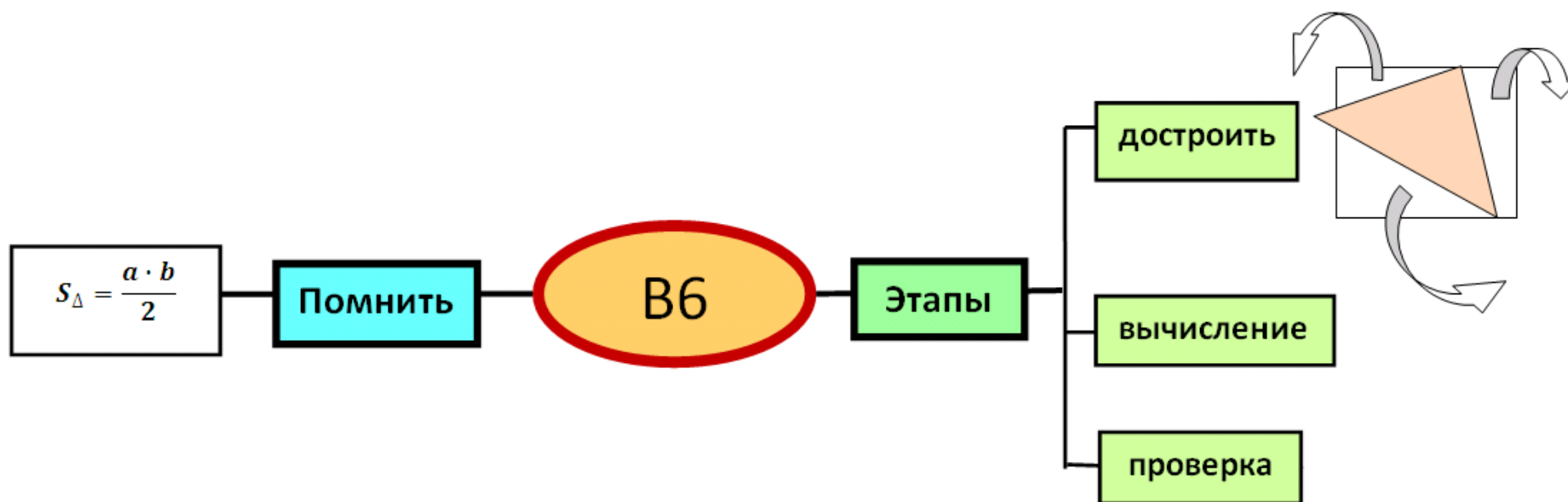
Рисунок 6.4

Последняя задача является примером того, что геометрическая фигура не обязательно будет дана на клетчатом фоне – клеток может и не быть. Но это ничего не меняет в способе ее решения. Так что не нужно впадать в ступор, если на рисунке вы не увидели знакомых клеточек ☺.

Кроме задач на вычисление площадей, судя по «Открытому банку заданий по математике», в разделе В6 возможны задачи на векторы – но это кажется маловероятным. Скорее всего, судя по прошлому году, они заброшены сюда «до кучи».

Приведенных примеров вполне достаточно, чтобы научиться самостоятельно решать такие простые задания. Хотя, возможно, вам больше нравится (или просто привычнее) использовать формулы площадей различных фигур. Или считать количество клеточек. Если так – пользуйтесь этим на здоровье. Лишь бы ответ был правильным!

И, как всегда, для проверки своих умений, не будет лишним сходить в [«Открытый банк заданий по математике»](#).

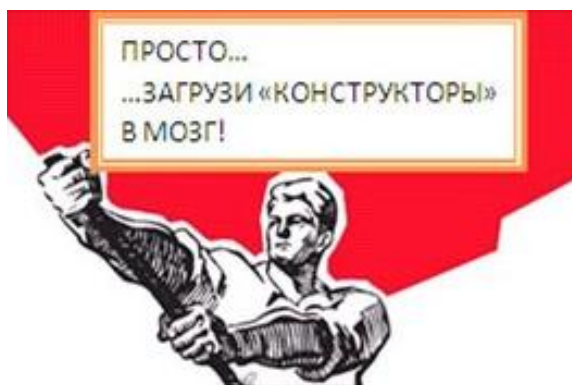


ЕГЭ-2011: Задание В7

Задания В7, судя по всему, будут заключаться в вычислении примеров, содержащих логарифмы («log») или степени.

Это задание сильно перекликается с В3, где приходилось решать различные уравнения (в том числе – логарифмические). Поэтому, прорабатывая задание В3 (получившееся таким ~~большим и нудным~~ живительным и интересным ☺) вы, по сути, «убиваете еще одного зайца» – по имени В7.

Во всех разобранных примерах применяются одно или несколько правил из набора *«логарифмического конструктора»* (см. «Логарифмы – «инструкция по применению» в задании В3). Для успешного решения этих заданий необходимо помнить также *«показательный конструктор»*. Напомню, что упомянутые «конструкторы» – это наборы правил работы со степенями и логарифмами (непреренно еще раз загляните в главу В3!).



Разбивка решения примеров В7 на этапы довольно условна. Ее цель – еще раз осознать и закрепить полезную привычку: вычислить → проверить → записать ответ.

В7.1. Найдите значение выражения $51\log_7 \sqrt[3]{7}.$

В7.2. Найдите значение выражения $25^{\log_5 \sqrt{17}}.$

В7.3. Найдите значение выражения $\frac{\log_9 \sqrt{22}}{\log_9 22}.$

В7.4. Найдите значение выражения $\frac{18}{8^{\log_8 3}}$

В7.5. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{22}} \sqrt{22}$.

В7.6. Найдите значение выражения $7^{\log_{49} 16}$.

В7.7. Найдите значение выражения $\log_{16} \log_3 81$.

В7.8. Найдите значение выражения $\log_7 13 \cdot \log_{13} 49$.

В7.9. Найдите значение выражения $\log_5 135 - \log_5 5,4$.

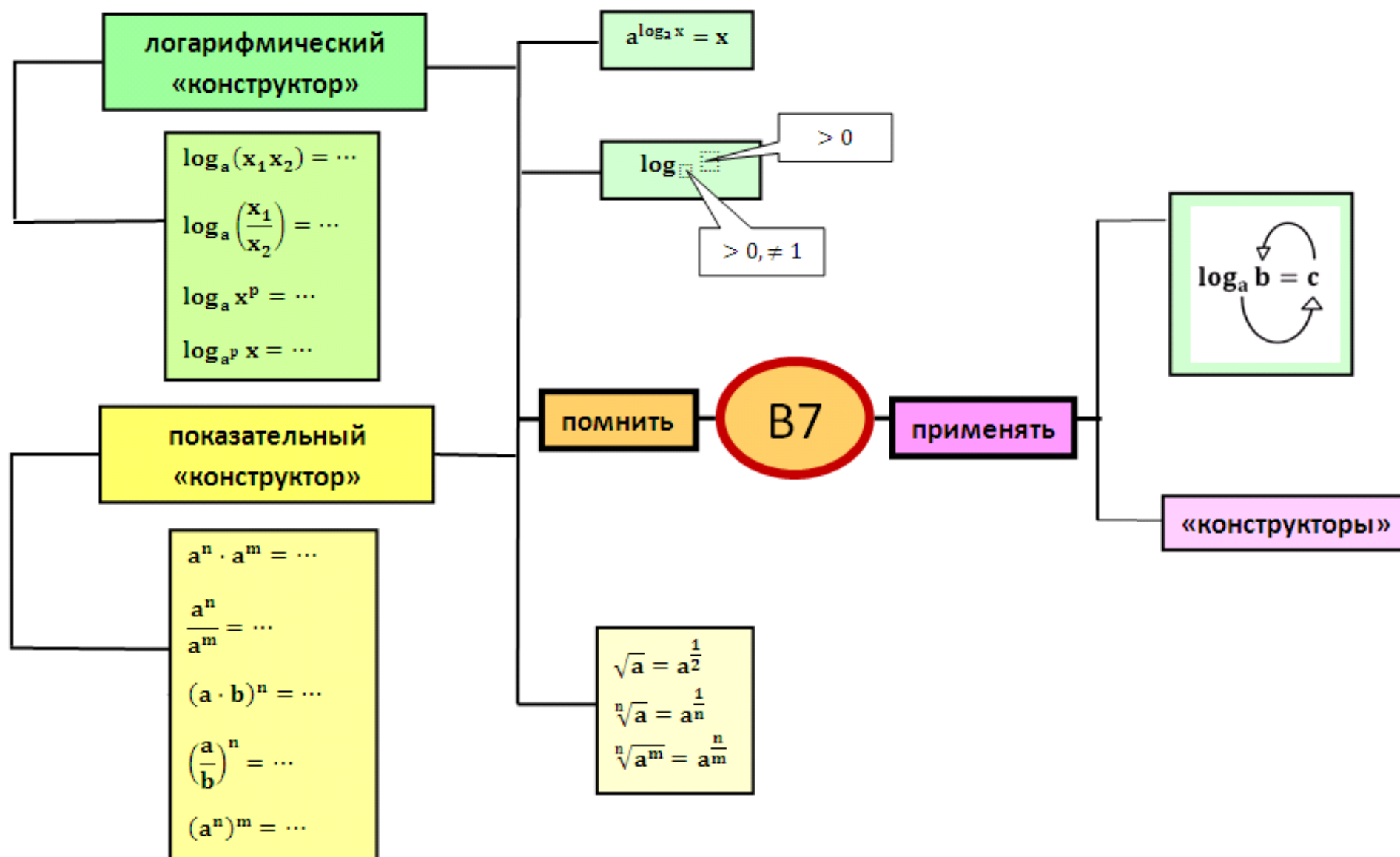
В7.10. Найдите значение выражения $9 - \sqrt[5]{4} \cdot 2^{\frac{3}{5}}$.

В7.11. Найдите значение выражения $-13 \cdot (256)^{\frac{1}{8}} + 16$.

Как видно из решенных примеров, В7-е не требуют особой математической мудрости. Знай «конструкторы» и пользуйся ими!

Для того, чтобы уверенно выполнять подобные задания, необходимо не столько понимать правила действий с логарифмами и степенями, сколько автоматически *применять* их на практике.

А для отработки этого самого автоматизма – все на тренировку в [«Открытый банк заданий по математике»](#) ☺!



ЕГЭ-2011: Задание В8

Задание В8 предстоящего экзамена связано с так называемой «производной функции». В условии этих заданий дается либо график самой функции, либо график ее производной. И по этому графику необходимо либо вычислить значение производной в указанной точке, либо сделать какие-то другие выводы.

По сути, эти задания довольно просты, хотя и занимают 8-е место «в рейтинге части В».

Довольно часто, после прочтения школьного учебника, производная функции кажется чем-то нереально сложным. Настолько сложным, что непонятно даже, «о чем это». И кажется, что простыми словами объяснить это невозможно.

Именно поэтому – для небольшого прояснения вопроса – сделаем очередное тематическое Отступление. К сожалению, не такое уж и маленькое ☹.

Но если его читать совсем уж не хочется, то можно сразу перейти к разбору примеров. Возможно, что их окажется достаточно для успешного решения этих заданий.

Отступление №4: «Производная функции: что это?».

- 1) Как известно, «не все йогурты одинаково полезны». Подобно этому, всевозможные функции во многих отношениях очень даже различны. Но мы сейчас обсудим не все их возможные различия, а только некоторые.

А именно – скорость их изменения.

Поясню, о чем речь. Например, функции 1 и 2 – возрастающие ($\uparrow$), а 3 и 4 – убывающие ($\downarrow$) (рис. 8а). Отличить друг от друга их очень просто. Если представить некий самолет, который летит по линии функции **слева направо**, и при этом набирает высоту ($\uparrow$), то функция возрастает. Если он снижается ($\downarrow$), то убывает. Функции 1 и 2, как видно, отличаются друг от друга скоростью возрастания («взлета»). А функции 3 и 4 – скоростью убывания («снижения»).

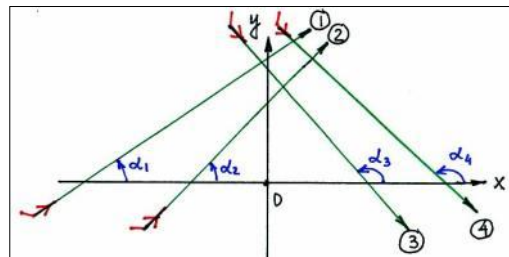


Рисунок 8а

- 2) В чем же измерять скорость возрастания или убывания функции? Самая простая мысль – связать эту скорость с углом наклона прямой линии к горизонту. Чем угол ближе к вертикали, тем быстрее изменение, чем он ближе к горизонтали – тем изменение медленнее.

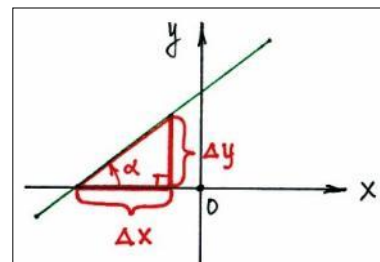


Рисунок 8б

И эта мысль совершенно правильна!

Однако для измерения этой скорости решили использовать не величину угла в градусах, а тангенс этого угла.

То есть **отношение длин вертикального катета к горизонтальному** в прямоугольном треугольнике, построенном в створе этого угла (рис. 8б).

Далее (при разборе примеров) все это будет более понятно.

Именно это отношение и считается равным скорости изменения функции.

И действительно, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает, на

сколько единиц изменится функция при изменении ее аргумента на 1 единицу. Точно так же, как обычная скорость, равная $v = \frac{s}{t}$, которая показывает, сколько

единиц длины (метров) тело проходит за 1 единицу времени (секунду) (рис. 8в).

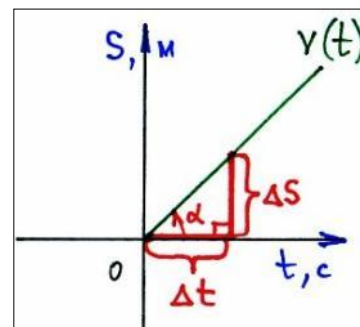


Рисунок 8в

- 3) А как быть, если функция представлена не прямой линией, а кривой? Ведь угол наклона к горизонту этой линии в разных ее точках различен? В этом случае вопрос решается очень просто. В любой точке графика функции можно построить касательную (рис. 8г).

А наклон этой касательной к горизонту (точнее, тангенс этого угла), как уже понятно, будет равен скорости изменения функции.

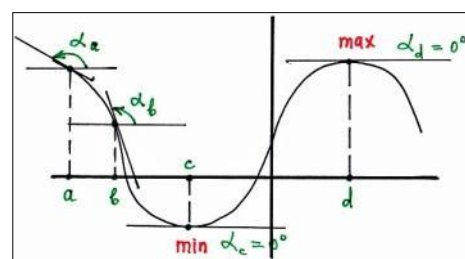


Рисунок 8г

Итак, получается простая схема работы: **выбрать точку на графике функции → провести в ней касательную к графику → отметить угол между касательной и горизонтом → вычислить тангенс угла.**

А значит — найти искомую скорость изменения функции («Элементарно, Ватсон!»).

- 4) А для того, чтобы не произносить каждый раз словосочетания типа «тангенс угла наклона касательной к горизонту» или «скорость изменения функции», используется специальный термин: **«производная функции»**. Вот и все. Производная функции в некоторой ее точке равна тангенсу угла наклона касательной к горизонту, и равна скорости изменения функции в этой же точке. Если записать последнее предложение в виде формулы, то получится следующее:

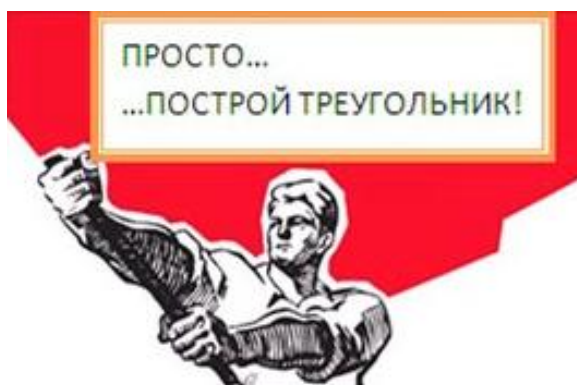
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = v(f).$$

А ТЕПЕРЬ НЕМНОГО О ДЕТАЛЯХ. ИЗ РИСУНКОВ МОЖНО ПОНЯТЬ СЛЕДУЮЩЕЕ:

<.....>

А не слабое получилось Отступление! А?

А теперь перейдем к примерам, для решения которых и пригодится вся эта теория.

Примеры решения заданий В8

В8.1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 (рис. 8.1).

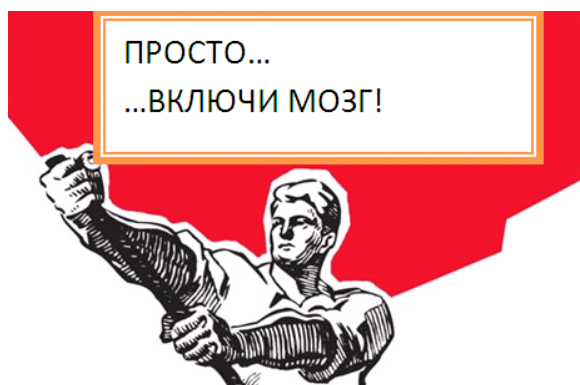
В8.2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 (рис. 8.2).

В8.3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 (рис. 8.3).

В8.4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 (рис. 8.4).

Вот и все – это и есть ответ! Желаю вам на ЕГЭ подобного задания!

А теперь рассмотрим несколько примеров с заданиями В8 другого типа.



В8.5. Функция $f(x)$ определена на интервале $(-8; 8)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите длину наибольшего промежутка возрастания функции $y = f(x)$ (рис. 8.5).

В8.6. Функция $f(x)$ определена на интервале $[-6; 3]$. На рисунке изображен график ее производной. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение (рис. 8.6)?

В8.7. Функция $f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите число точек минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(a; b)$ (рис. 8.7).

В8.8. Функция $f(x)$ определена на интервале $(-5; 4)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-5; 4)$ (рис. 8.8).

В8.9. На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$, определенной на интервале $(-2; 9)$.

Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 12$ или совпадает с ней (рис. 8.9б).

В8.10. На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$, определенной на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 5$ или совпадает с ней (рис. 8.10).

Много подобных картинок с пользой для себя вы можете найти и поразглядывать в [«Открытом банке заданий по математике»](#) ☺.

ЕГЭ-2011: Задание В9

Задания В9 экзамена тематически связаны с объемными геометрическими фигурами. В этих заданиях упоминаются два типа фигур: усеченные фигуры (конус и пирамида) и «обыкновенные» (цилиндр, призма, прямоугольный параллелепипед, реже шар).

Практически все задания В9 довольно просты. А порой – даже примитивны. Но, как всегда, только при правильном подходе к ним.

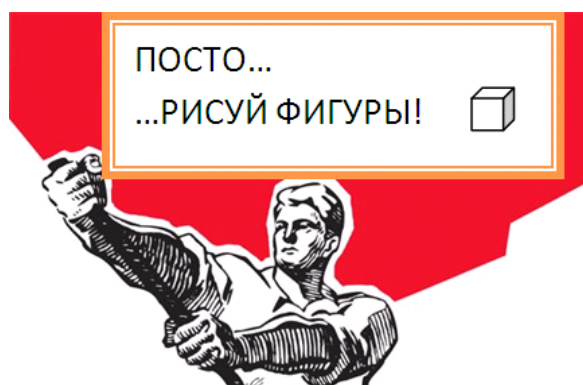
Для их успешного решения обязательно нужно отразить суть задачи на одном или двух рисунках. Как правило, первый, объемный рисунок нужен для общего представления. Но часто его бывает недостаточно, так как некоторые «дорисовки» на нем делать неудобно. Именно поэтому очень полезно использовать дополнительные рисунки. Например, рисунок основания фигуры. А также вид фигуры сверху или сбоку.

Понятно, что действительно красивые и правильные рисунки бывают только в книжках. Такие рисунки получаются лишь у немногих (у меня, например, не получаются ☺). Но это и не важно! Лишь бы они помогали в работе. Некоторые рисунки неизбежно будут неудачными – это нормально. Спокойно зачеркиваем их и делаем другие. Какие бы плохие навыки рисования у вас ни были, в процессе самостоятельного решения десятка задач они заметно улучшатся.

И уж для В9 станут вполне достаточными!

Как вы, наверное, уже убедились, справочники и различные пособия предлагают поистине огромное количество разных формул по геометрии. Как простых, так и довольно сложных. Заучивать их подряд, без разбора, категорически не следует – это бесполезная трата сил и времени. Для успешного решения заданий В9 вполне достаточно помнить следующее:

- ✓ Объем любой «обычной» фигуры $V = S_{\text{осн}} \cdot H$;
- ✓ Объем любой усеченной фигуры $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, то есть в 3 раза меньше при прочих равных условиях (то есть при тех же $S_{\text{осн}}$ и H);
- ✓ Площадь круга $S = \pi r^2$;
- ✓ Длина окружности $C = 2\pi r$;
- ✓ Теорема Пифагора (обсуждалась ранее в задании В4);
- ✓ Объем шара $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, а также формулы площадей квадрата, прямоугольника и треугольника, которые даже в книжке для «чайников» я перечислять не буду.

Примеры решения заданий В9

В9.1. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса **0,5**.
Найдите его объем.

В9.2. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту.
Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 27.

В9.3. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости равен 9 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого?
Ответ выразите в сантиметрах.

В9.4. Шар объемом 8 м^3 вписан в цилиндр. Найдите объем цилиндра (в м^3).

В9.5. Объем цилиндра равен 1 см^3 . Радиус основания уменьшили в 2 раза, а высоту увеличили в 3 раза. Найдите объем получившегося цилиндра.
Ответ дайте в см^3 .

В9.6. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 7 и 8. Боковые ребра равны $\frac{8}{\pi}$.

Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

В9.7. Кубик весит 800 г. Сколько граммов будет весить кубик, ребро которого в 2 раза меньше, чем ребро первого кубика, если оба кубика изготовлены из одинакового материала?

В9.8. Бильярдный шар весит 360 г. Сколько граммов будет весить шар вдвое меньшего радиуса, сделанного из того же материала?

В9.9. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 10. Боковые ребра равны $\frac{3}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

В9.10. Объем данного правильного тетраэдра равен 2 см^3 . Найдите объем правильного тетраэдра, ребро которого в 3 раза больше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см^3 .

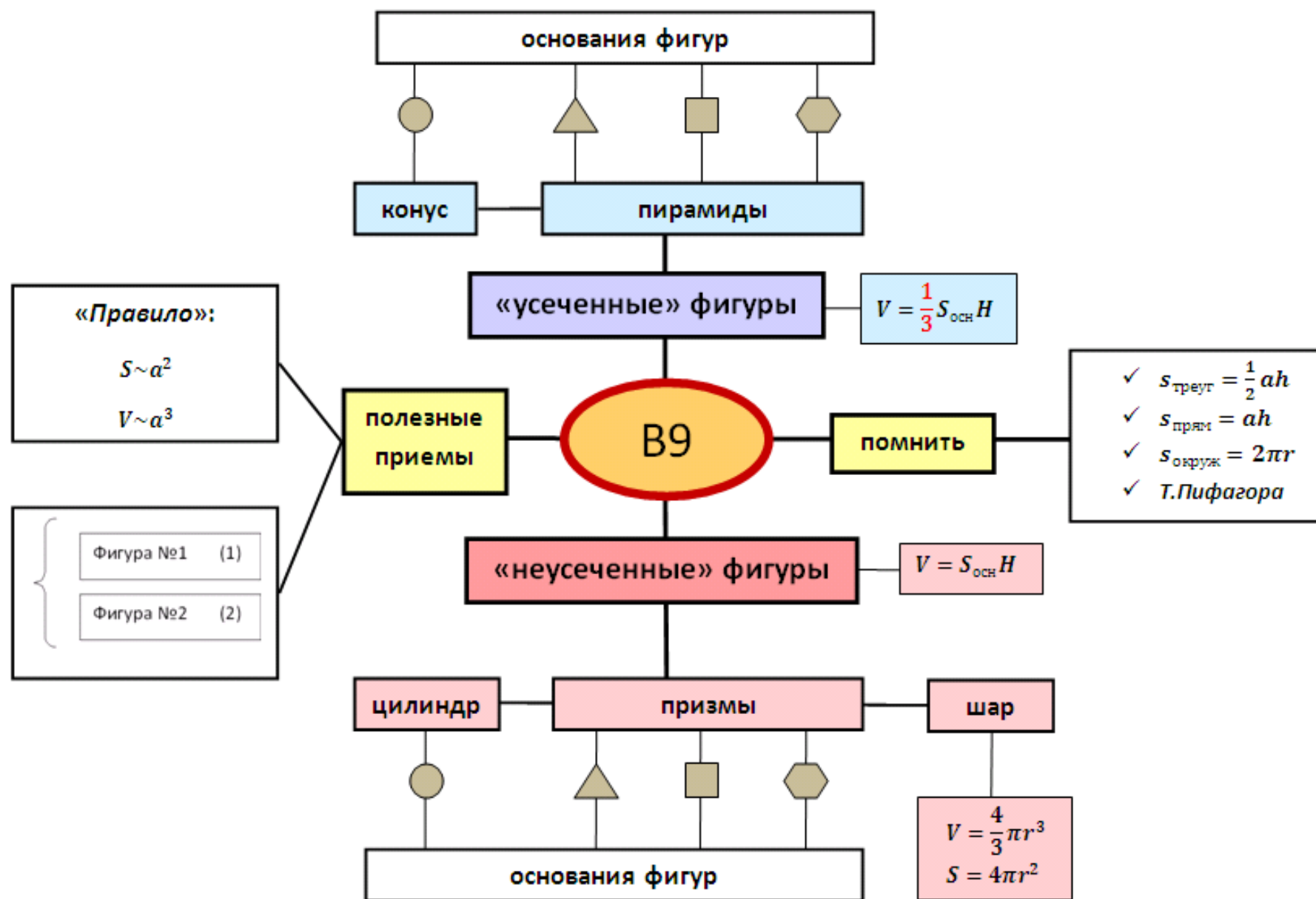
В9.11. Радиус основания первого конуса в 2 раза меньше, чем радиус основания второго конуса, а образующая первого конуса в 3 раза больше, чем образующая второго. Чему равна площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго равна 22 см^2 ? Ответ дайте в см^2 .

Задания В9 экзамена, судя по обзору [«Открытого банка заданий по математике»](#), могут быть довольно разнообразными, но основной подход к их решению уже понятен из рассмотренных примеров.

Обязательное условие для их правильного понимания и успешного решения – это, как и во многих других заданиях, составление самого обыкновенного рисунка!

Успешного вам рисования!

И, по сложившейся традиции, законспектируем задание В9 очередной картинкой.



ЕГЭ-2011: Задание В10

По замыслу разработчиков ЕГЭ, задания В10 являются «практико-ориентированными». То есть такими заданиями, которые якобы встречаются на практике (в жизни). Или, по крайней мере, могут встретиться. Или не совсем такие, но очень похожие.

В этих задачах встречаются самые разные сюжеты: мальчик, бросающий камни в колодец с целью определить его глубину (!) с помощью откуда-то взятой формулы; некий электрический прибор, который через определенное время нужно непременно выключать из розетки, чтобы он не перегорел (!) и многие другие забавности.

Видимо, таким образом показывается ценность математики в решении прикладных, житейских задач.

Однако, сдающие ЕГЭ по математике на заданиях В10, как правило, получают лишнюю «головную боль». А именно: он вынужден продираться сквозь смысл физических (!), экономических (!) и других терминов, которыми напичканы эти задания. Кому-то это дается легко, кому-то труднее. Но для многих суть задачи остается «условно понятной»: то есть каждое слово по отдельности понятно, а все вместе – не очень.

Так или иначе, но здесь присутствуют дополнительные трудности, не связанные с собственно сдаваемой математикой ☹.

Чтобы преодолеть эти трудности непонимания, весьма полезно помнить следующее: практически все эти задания сводятся к решению самых обычных квадратных уравнений или неравенств. Таким образом, даже не особо понимая суть условия, нужно стремиться «собрать» из него (но не совсем уж наугад!) выражение вида $ax^2 + bx + c = 0$ или $ax^2 + bx + c \leq 0$. Это и есть тот своеобразный маяк, на который нужно заранее ориентироваться.

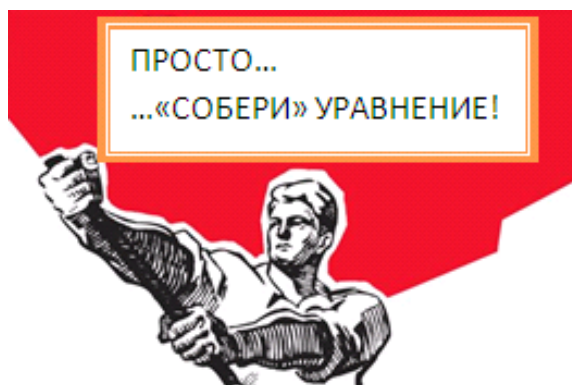
Далее. Многие задания В10, особенно «физические», содержат величины, которые не могут быть «любыми» (например, электрическое сопротивление не может быть отрицательным). Такие моменты нужно обязательно учитывать при анализе полученных корней уравнений, и после этого отбрасывать непригодные. То, что правильно и грамотно с точки зрения математики, может быть абсурдно с точки зрения физического содержания задачи. Примеры такого рода задач будут показаны ниже.

И последнее. К сожалению, встречаются задачи, содержание которых (или задаваемый вопрос) допускают двойное толкование. Или содержат заведомо лишнюю информацию (в том числе цифры), мешающую их пониманию, что в прежние, «менее

прогрессивные» времена, считалось недопустимым. Образец такой задачи (B10.10) специально приведен для примера. Это «мутные» задачи, «задачи – диверсии». Таких задач, в идеале, не должно быть вообще. По крайней мере – на ЕГЭ. Чего вам и желаю!

А теперь самое главное, ради чего и было сделано вступление – практические примеры.

Примеры решения заданий B10



В10.1. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 90 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее сопротивление этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задается формулой $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 40 Ом.

В10.2. Для одного из предприятий – монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 180 - 10p$. Определите максимальный уровень цены (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 720 тыс. руб.

В10.3. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 980$ К, $a = 30$ К/мин, $b = -0,2$ К/мин². Известно, что при температурах нагревателя свыше 1500 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

В10.4. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 70%, если температура холодильника $T_2 = 150$?

В10.5. К боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем меняется по закону $h(t) = 3,2 - 1,44t + 0,16t^2$ (h – высота в метрах), где t – время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

В10.6. Если наблюдатель находится на небольшой высоте h над поверхностью Земли, то расстояние от него до линии горизонта можно найти по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км – радиус Земли. Найдите наименьшую высоту, с которой должен смотреть наблюдатель, чтобы он видел линию горизонта на расстоянии не менее 6,4 км? (Ответ выразите в метрах).

В10.7. Масса радиоактивного вещества уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 12$ мг изотопа меди-64, период полураспада которого T равен 12,8 ч. В течение скольких часов количество изотопа меди-64 в веществе будет превосходить 3 мг?

В10.8. Электрическая цепь напряжением 220 В защищена предохранителем, рассчитанным на силу тока 8 А. Найдите наименьшее сопротивление, которое может быть у электроприбора, включенного в эту цепь, чтобы предохранитель продолжал работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R – сопротивление электроприбора. (Ответ выразите в омах).

В10.9. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

В10.10. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время падения t небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние от поверхности земли до уровня воды по формуле $h = -5t^2$. До дождя время падения камешков составляло 1 с. На какую наименьшую высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось больше, чем на 0,1 с? (Ответ выразите в метрах).

А теперь, после рассмотрения этих, довольно разных примеров, можно сходить в [«Открытый банк заданий по математике»](#), где находится большое количество других, еще более разных и ужасно интересных «практико – ориентированных» заданий В10 ☺.

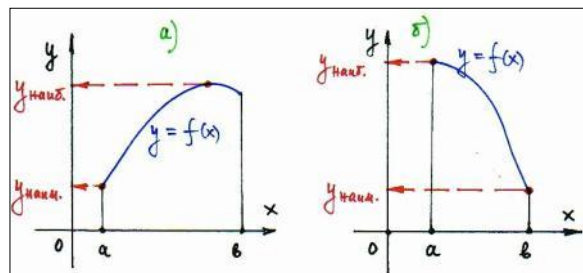
ЕГЭ-2011: Задание В11

Задания В11 в [«Открытом банке заданий по математике»](#) представлены задачами двух типов.

- 1) Задачи **Первого типа**: найти наибольшее или наименьшее значение функции (y) на заданном отрезке аргумента (x).

Например, «найдите наибольшее значение функции $y = 12\operatorname{tg}x - 12x + 3\pi - 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{4}\right]$ ».

Ответом будет являться значение y (причем, обязательно десятичное!).
Смысл этих задач отражен на рис. 11а.



- 2) Задачи **Второго типа**: найти точку максимума или минимума функции.

Рисунок 11а

Например, «найдите точку максимума функции $y = (19 - x)e^{19-x}$ ».

В этом случае ответом будет значение x (обязательно десятичное!).

Смысл этих задач отражен на рис. 11б.

При определенном сходстве, эти два типа задач «совсем о разном», и будут далее решаться принципиально разными способами.

Именно поэтому все примеры решения заданий В11 разбиты на две части.

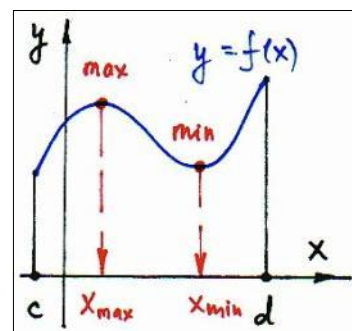
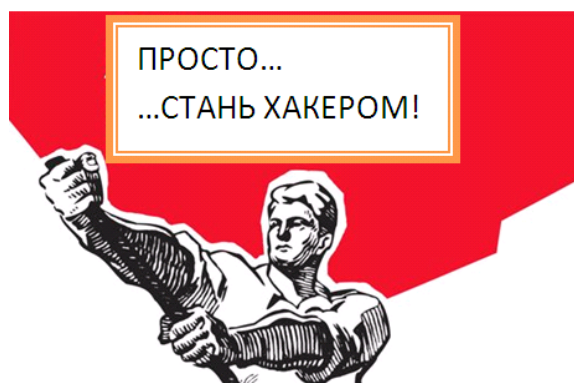


Рисунок 11б

Задания В11 Первого типа

«Найти максимальное (минимальное) значение функции на заданном отрезке».



Примеры решения заданий В11 Первого типа

В11.1. Найти наибольшее значение функции $y = 12 \tan x - 12x + 3\pi - 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{4}\right]$.

В11.2. Найти наименьшее значение функции $y = 3 \sin x + \frac{36}{\pi}x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

В11.3. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{26\sqrt{3}}{3} \cos x + \frac{13\sqrt{3}}{3}x - \frac{13\sqrt{3}\pi}{18} + 11$ на отрезке $\left[0; -\frac{\pi}{2}\right]$.

В11.4. Найти наименьшее значение функции $y = 5 \tan x - 5x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

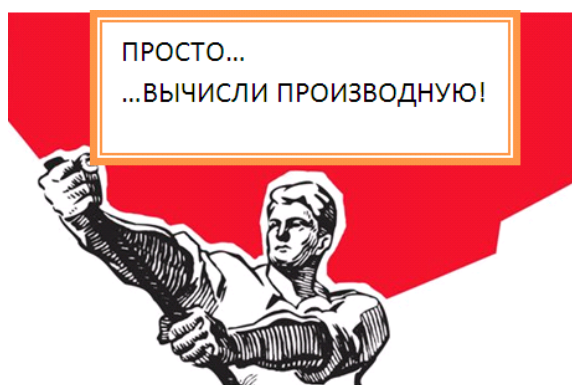
В11.5. Найти наибольшее значение функции $y = \ln(x+2)^8 - 8x$ на отрезке $[-1,5; 0]$.

В11.6. Найти наибольшее значение функции $y = \ln(7x) - 7x + 7$ на отрезке $\left[\frac{1}{14}; \frac{5}{14}\right]$.

В11.7. Найти наименьшее значение функции $y = (x^2 - 7x + 7)e^{x-5}$ на отрезке $[4; 6]$.

Задания В11 Второго типа

«Найти точку максимума или минимума функции».



Для освежения в памяти минимально необходимой (для этих заданий) информации сделаем еще одно тематическое Отступление.

Отступление №5: «Вычисление производной функции по заданной формуле этой функции».

<.....>

Примеры решения заданий В11 Второго типа

В11.8. Найдите точку минимума функции $y = (15 - x)e^{15-x}$.

В11.9. Найдите точку минимума функции $y = (2x^2 - 34x + 34)e^{x-34}$.

В11.10. Найдите точку максимума функции $y = (x - 11)^2 e^{x-4}$.

В11.11. Найдите точку минимума функции $y = (3x^2 - 42x + 42)e^{7-x}$.

В11.12. Найдите точку максимума функции $y = (x - 13)^2 e^{32-x}$.

В11.13. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2+225}{x}$.

Приведенных выше примеров для понимания схемы решения заданий В11 Второго типа должно быть вполне достаточно.

А теперь рассмотрим обещанные задания В11 Первого типа, которые НЕ решаются методом подбора ответа («взломом»), а требуют вычисления производной.

**Примеры решения заданий В11 Первого типа
(продолжение)**

В11.14. Найдите наибольшее значение функции

$y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ на отрезке $[-1; 4]$.

В11.15. Найдите наибольшее значение функции

$y = x^4 + 4x^3 + 5$ на отрезке $[-2; 2]$.

В11.16. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2+49}{x}$

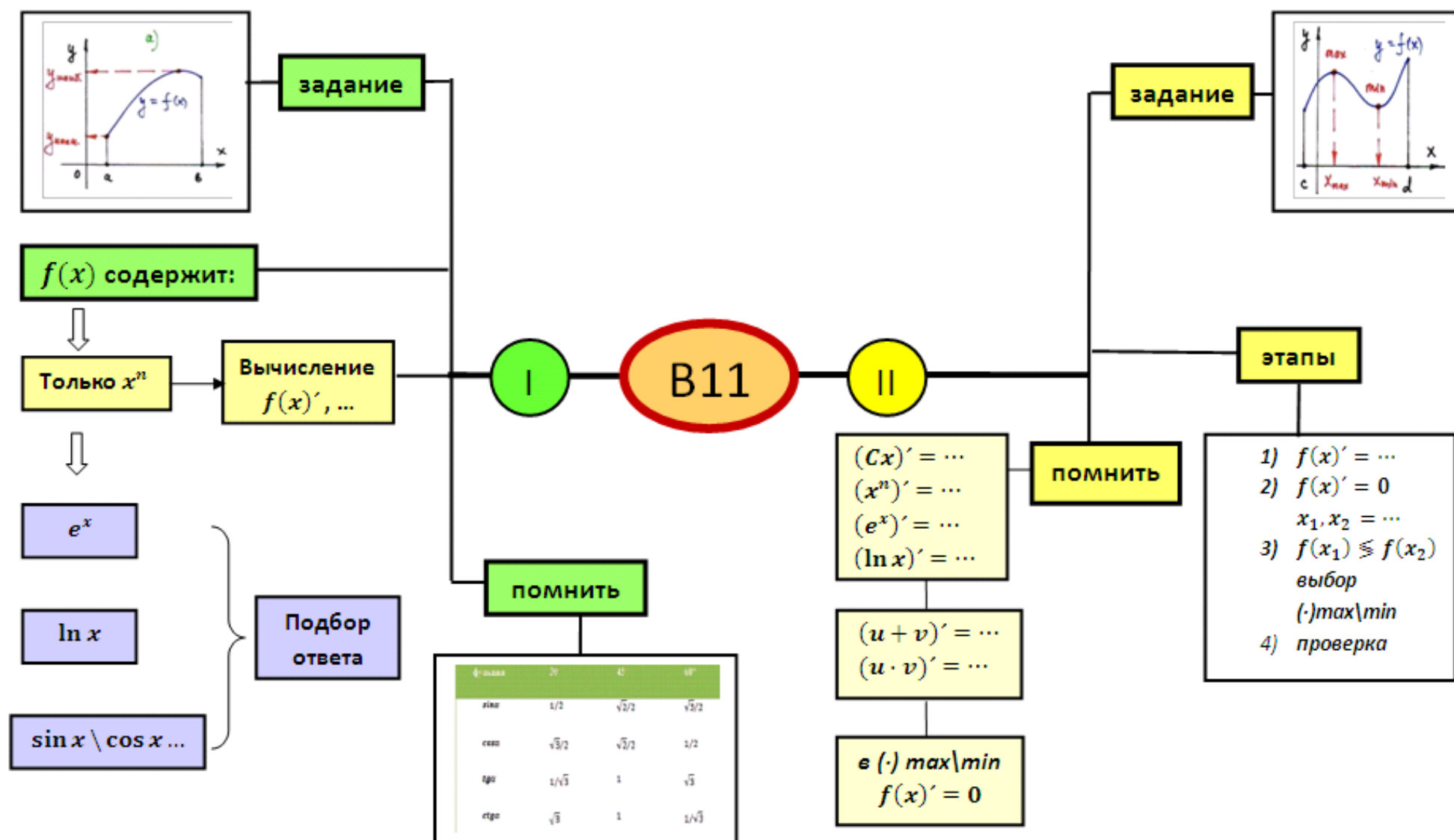
на отрезке $[1; 10]$.

В11.17. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке $[0; 9]$.

Вот, собственно, и все! Хотелось бы написать еще что-нибудь умное по поводу В11, но больше я ничего придумать не могу ☺.

Может быть, вы найдете это в [«Открытом банке заданий по математике»](#)?

И напоследок – картинка по этой главе...



ЕГЭ-2011: Задание В12

Общие рекомендации

Успешное выполнение некоторых заданий решающим образом зависит от выбранного способа этого самого выполнения. Для решения большинства заданий существуют и используются как простые и очевидные способы (а значит хорошие), так и сложные, «мутные» (а значит плохие).

Эти различия между хорошими и плохими способами как нельзя лучше проявляются при решении текстовых задач. Именно в них «техника решения» играет определяющую роль.

В учебной литературе упоминаются самые разнообразные примеры таких «техник». Часто они не наглядны, достаточно сложны в запоминании и производят впечатление чего-то искусственного. Например, так нелюбимый многими подход через длинные многоходовые рассуждения: *«Пусть x – это ... , тогда ...»*.

Иногда такое решение-рассуждение может занимать в книге до четверти печатной страницы! Оно требует много времени для того, чтобы разобраться с ним, но даже при многократном прочтении (несмотря на то, что все вроде бы правильно) все же остается ощущение какого-то жульничества. Наверное, такая ситуация знакома и вам?

Или другой популярный совет: составлять для каждого типа задач специальные таблицы, в которых все содержание задачи разносится по разным ячейкам. А после этого, поглядев на таблицу, рекомендуется каким-то загадочным образом вдруг взять, и решить задачу!

Подобные советы обычно имеют весьма и весьма ограниченную пользу. Научиться решать такими неочевидными и мудреными способами получается, как правило, только у «математически продвинутых» учащихся. У меня, например, так и не получилось ☺.

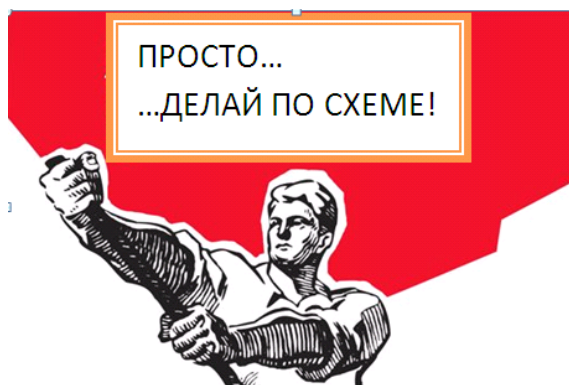
Предлагаемый ниже **Подход к решению текстовых задач** сводится к двум основным моментам:

- 1) По условию любой задачи нужно обязательно (!) составлять рисунок.
Именно так – как в 5-м классе! На него в схематичном виде наносится вся существенная информация. Достоинство такого рисунка – возможность одним взглядом охватить все содержание задачи и понять его, причем после его составления печатный текст условия для решения уже не нужен;
- 2) Рисунок позволяет выявить некий важный, ключевой факт (идею) решаемой задачи. По поводу этого факта заранее известно следующее:
 - ✓ Он обязательно содержится в условии;
 - ✓ Он очень простой;
 - ✓ Он может быть выражен «просто словами», без каких-либо формул;
 - ✓ Именно этот факт «порождает» уравнение, которое, в свою очередь, приводит к ответу (либо помогает вычислить искомое отношение).

Таким образом, рисунок дает быстрое понимание сути задачи, а найденный факт (идея) приводит к собственно решению.

Все сказанное будет проиллюстрировано конкретными примерами решения достаточно разноплановых задач.

Примеры решения заданий В12



В12.1. От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью на 1 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

В12.2. Два велосипедиста одновременно отправляются в 168-километровый пробег. Первый едет со скоростью, на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

В12.3. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 504 км и после стоянки возвращается в пункт назначения. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 23 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 56 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

В12.4. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 240 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 224 литра?

В12.5. Первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй рабочий, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 192 деталей, на 4 часа раньше, чем второй рабочий выполняет заказ, состоящий из 224 таких же деталей. Сколько деталей делает в час второй рабочий?

В12.6. Из А в В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 14 км/час, а вторую половину пути проехал со скоростью 84 км/час, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 52 км/час. Ответ дайте в км/ч.

В12.7. Два фермера, работая вместе, могут вспахать поле за 25 часов. Производительности труда первого и второго фермеров относятся как 2:5. Фермеры планируют работать поочередно. Сколько времени должен проработать второй фермер, чтобы это поле было вспахано за 45,5 часов?

В12.8. Два плотника, работая вместе, могут выполнить задание за 36 часов. Производительность труда первого и второго плотников относятся как 3:4. Плотники договорились работать поочередно. Какую часть этого задания должен выполнить второй плотник, чтобы все задание было выполнено за 69,3 ч?

В12.9. На рынке костюм, состоящий из пиджака и брюк, стоит на 20% дешевле, чем такой же костюм в магазине, причем брюки стоят на 35% дешевле, чем в магазине, а пиджак – на 10%. Сколько процентов стоимости этого костюма в магазине составляет стоимость пиджака?

В12.10. При покупке ребенку новых лыж с ботинками родителям пришлось заплатить на 35% больше, чем два года назад, причем лыжи подорожали с тех пор на 20%, а ботинки – на 70%. Сколько процентов от стоимости лыж с ботинками составляла два года назад стоимость лыж?

В12.11. Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как 7:6:5. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 4%, а из второй – на 2%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой за год нефти не изменился?

В12.12. Цистерна заполняется керосином за 2 часа с помощью трех насосов, работающих вместе. Производительности насосов относятся как 1:2:7. Сколько процентов объема цистерны будет заполнено за 1 час 12 минут совместной работы первого и второго насосов?

В12.13. За первый год предприятие увеличило выпуск продукции на 8%. В следующем году он увеличился на 25%. На сколько процентов вырос выпуск продукции по сравнению с первоначальным?

В12.14. Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18%. Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 кг.

В12.15. После двух повышений зарплата увеличилась в 1,43 раза. При этом число процентов, на которое повысилась зарплата во второй раз, было в 3 раза больше, чем в первый раз. На сколько процентов повысилась зарплата во второй раз?

В12.16. Первый сплав серебра и меди содержит 70 г меди, а второй сплав – 210 г серебра и 90 г меди. Взяли 225 г первого сплава и кусок второго сплава, сплавляли их и получили 300 г сплава, который содержит 82% серебра. Сколько граммов серебра содержалось в первом сплаве?

Глава В12 получилась явно больше других, и это не случайно. Ведь, по существующей статистике (информация взята из одной, не помню уже какой именно, брошюры по ЕГЭ) успешно справляются с текстовыми задачами около 10 процентов выпускников. Даже если эта цифра занижена, трудности с их решением, как показывает практика, действительно велики.

С пользой для дела вы можете «набить руку» на подобных задачах, время от времени посещая [«Открытый банк заданий по математике»](#).

Заключение

Вы имели возможность познакомиться с 1-й частью пособия
«ЕГЭ – 2011 по математике: 12 советов для «чайников»,
то есть с заданиями В1 – В6 будущего экзамена.

Задания В7 – В12 ЕГЭ рассмотрены в Полной версии пособия.

Прочитать о нем более подробно

и заказать его

вы можете

на сайте <http://EGEprosto.ru/>