Вариант №2 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 3^{y+1} = 2\cos x \\ 3^{-y} = 4\cos x + 1 \end{cases}$$

Решаем подстановкой

$3^{-y} = 2 \cdot 3^{y+1} + 1; \quad 3^y = t > 0;$

$\frac{1}{t} = 6t + 1; \quad \to \quad 6t^2 + t - 1 = 0; \quad \to \quad t_{1,2} = \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}$

Корень $t = -\frac{1}{2}$ не подходит, т.к. $3^y > 0$

Тогда $3^y = \frac{1}{3}; \quad \to \quad y = -1$

Находим *x*. $2\cos x = 1; \quad \to \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \to \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \quad y = -1;$

Вариант №3 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} \sin x = y - 3 \\ \cos x = y - 2 \end{cases}$$

Используем основное тригонометрическое тождество.

$(y-3)^2 + (y-2)^2 = 1$

$2y^2 - 10y + 13 = 1$

$y^2 - 5y + 6 = 0$

$y = 2; 3$

Если $y = 2$, то $\begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \quad \to \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Если $y = 3$, то $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \quad \to \quad x = 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \quad y = 2$

$x = 2\pi k, k \in Z; \quad y = 3$

Вариант №4 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} \sin y = x - 6 \\ \cos y = x - 7 \end{cases}$$

Используем основное тригонометрическое тождество.

$$(x-6)^2 + (x-7)^2 = 1$$

$$2x^2 - 26x + 85 = 1$$

$$x^2 - 13y + 42 = 0$$

$$x = 6; 7$$

Если $x = 7$, то $\begin{cases} \sin y = 1 \\ \cos y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Если $y = 6$, то $\begin{cases} \sin y = 0 \\ \cos y = -1 \end{cases} \rightarrow \quad y = \pi + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $\begin{matrix} x = 7; \quad y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \\ x = 6; \quad y = \pi + 2\pi k, k \in Z; \end{matrix}$

Вариант №5 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 2^x = \sin y \\ 2^{-x} = 2\sin y + 1 \end{cases}$$

Решаем подстановкой, обозначив $2^x = t > 0$

$$\frac{1}{t} = 2t + 1$$

$$2t^2 + t - 1 = 0; \quad t = -1; \frac{1}{2}$$

Т.к. $t > 0$, то $t = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x = -1$

Найдем *y*.

$$\sin y = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = -1; \quad y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Вариант №6 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 81^{\sin y} - 30 \cdot 9^{\sin y} + 81 = 0 \\ \sqrt{x} + 2\cos y = 0 \end{cases}$$

Заметим, что второе уравнение системы может иметь решения только при $\cos y \le 0$.
Решим первое уравнение, обозначив $9^{\sin y} = t > 0$.

$$t^2 - 30t + 81 = 0; \quad \to \quad t = 27;3 \quad \to \quad 9^{\sin y} = 3^{2\sin y} = 27;3 \quad \to \quad 2\sin y = 3;1$$

$$\sin y \ne \frac{3}{2} > 1; \quad \sin y = \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z; \quad y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

Т.к. $\cos y \le 0$, то $y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Находим *x*.

$$y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \quad \to \quad \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt{x} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \to \quad x = 3;$$

Ответ: $x = 3; \quad y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Вариант №7 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 2\sin^2 y + 3\sin y - 2 = 0 \\ \sqrt{x^2 - x} + 4\cos y = 0 \end{cases}$$

Заметим, что второе уравнение системы может иметь решения только при $\cos y \le 0$.
Решим первое уравнение, обозначив $\sin y = t$.

$$2t^2 + 3t - 2 = 0; \quad \to \quad t = -2;\frac{1}{2};$$

$$\sin y \ne -2 < -1; \quad \sin y = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z; \quad y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

С учетом того, что $\cos y \le 0$ получаем:

$$y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

Находим *x*.

$$\sqrt{x^2 - x} - 2\sqrt{3} = 0$$

$$x^2 - x = 12 \quad \to \quad x^2 - x - 12 = 0 \quad \to \quad x = 4;-3$$

Ответ: $x = 4;\ y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z; \quad x = -3;\ y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Вариант №8 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 3\sin x = \cos 2x + 1 \\ \sqrt{y^2 + 6y} + 6\cos x = 0 \end{cases}$$

Заметим, что второе уравнение системы может иметь решения только при $\cos x \le 0$.
Решим первое уравнение, обозначив $\sin x = t$.

$$3\sin x = 1 - 2\sin^2 x + 1$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = -2; \frac{1}{2};$$

$$\sin x \ne -2 < -1; \quad \sin x = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

С учетом того, что $\cos x \le 0$ получаем:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

Находим *y*.

$$\sqrt{y^2 + 6y} - 3\sqrt{3} = 0;$$

$$y^2 + 6y = 27; \quad \rightarrow \quad y^2 + 6y - 27 = 0; \quad \rightarrow \quad y = -9; 3$$

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; $y = -9$; $\quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; $y = 3$;

Вариант №9 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 4xy + 4y^2 - 16} = x - 2y \\ y^2 - 2xy + 16 = 0 \end{cases}$$

Разберемся с первым уравнением.

$$\sqrt{2x^2 - 4xy + 4y^2 - 16} = x - 2y$$

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 16 = x^2 - 4xy + 4y^2$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x = 4; -4;$$

Найдем *y* из второго уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y^2 - 8y + 16 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y^2 + 8y + 16 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Само собой, надо сделать проверку. При подстановке в первое уравнение видно, что первая пара корней не подходит.

Ответ: $x = -4; \quad y = -4;$

Вариант №10 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} \sqrt{2y^2-2xy+x^2-25}=y-x \\ x^2-4xy+100=0 \end{cases}$$

Разберемся с первым уравнением.

$$\sqrt{2y^2-2xy+x^2-25}=y-x$$

$$2y^2-2xy+x^2-25=y^2-2xy+x^2$$

$$y^2-25=0$$

$$y=5;-5$$

Найдем *x* из второго уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=5 \\ x^2-20x+100=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-5 \\ x^2+20x+100=0 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=10 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-10 \\ y=-5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Само собой, надо сделать проверку. При подстановке в первое уравнение видно, что первая пара корней не подходит.

Ответ: $x=-10; \quad y=-5;$

Вариант 2 С3

Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1)\ge\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2)$$

Сначала ограничения на основание логарифма:

$$\frac{3x-1}{x+2}>0 \quad\to\quad x\in(-\infty;-2)\cup(1/3;\infty)$$

$$\frac{3x-1}{x+2}\ne 1 \quad\to\quad x\ne\frac{3}{2}$$

Еще ограничения:

$$\begin{cases}2x^2+x-1>0\\ -3x^2+11x-6>0\end{cases} \quad\to\quad \begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup(0{,}5;\infty)\\ x\in(2/3;3)\end{cases} \quad\to\quad x\in(2/3;3) \qquad (1)$$

Все вместе дает $x\in\left(\frac{2}{3};3\right),\ x\ne\frac{3}{2}.$

Теперь само неравенство:

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1)-\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2)\ge 0$$

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\frac{2x^2+x-1}{-3x^2+11x-6}\ge 0$$

1) Случай $\frac{3x-1}{x+2}>1 \quad\to\quad \frac{2x-3}{x+2}>0 \quad\to\quad x\in(-\infty;-2)\cup\left(\frac{3}{2};\infty\right)$

С учетом (1): $x\in\left(\frac{3}{2};3\right)$

Получаем:

$$\frac{2x^2+x-1}{-3x^2+11x-6}\ge 1 \quad\to\quad \frac{2x^2+x-1+3x^2-11x+6}{-3x^2+11x-6}\ge 0 \quad\to\quad \frac{5x^2-10x+5}{-3x^2+11x-6}\ge 0$$

$$\frac{x^2-2x+1}{3x^2-11x+6}\le 0 \quad\to\quad \frac{(x-1)^2}{3(x-3)\left(x-\frac{2}{3}\right)}\le 0 \quad x\in\left(\frac{2}{3};3\right)$$

Т.к. $x\in\left(\frac{3}{2};3\right)$, то решение в этом случае имеет вид $x\in\left(\frac{3}{2};3\right)$.

2) Случай $\frac{3x-1}{x+2}<1 \quad\to\quad \frac{2x-3}{x+2}<0 \quad\to\quad x\in\left(-2;\frac{3}{2}\right)$

С учетом (1): $x\in\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$

Получаем:

$$\frac{2x^2+x-1}{-3x^2+11x-6}\le 1 \quad\to\quad \frac{2x^2+x-1+3x^2-11x+6}{-3x^2+11x-6}\le 0 \quad\to\quad \frac{5x^2-10x+5}{-3x^2+11x-6}\le 0$$

$$\frac{x^2-2x+1}{3x^2-11x+6}\ge 0 \quad\to\quad \frac{(x-1)^2}{3(x-3)\left(x-\frac{2}{3}\right)}\ge 0 \quad x\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup(3;\infty)\cup\{1\}$$

Т.к. $x\in\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$, то решение в этом случае имеет вид $x=1$.

Окончательно: $x\in\{1\}\cup\left(\frac{3}{2};3\right)$.

Вариант 3 С3

Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0$$

Рассмотрим сначала случай $5^x-1>0 \quad \to \quad 5^x>1 \quad \to \quad x>0$

Тогда $4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}\le 0$

$4^{x^2+3x-2}\le (0{,}5)^{2x^2+2x-1} \quad \to \quad 2^{2x^2+6x-4}\le 2^{-2x^2-2x+1}$

$2x^2+6x-4\le -2x^2-2x+1 \quad \to \quad 4x^2+8x-5\le 0 \quad \to \quad x\in\left[-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right]$

Т.к. $x>0$, то $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Теперь случай $5^x-1<0 \quad \to \quad 5^x<1 \quad \to \quad x<0$

Тогда $4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}\ge 0$

$4^{x^2+3x-2}\ge (0{,}5)^{2x^2+2x-1} \quad \to \quad 2^{2x^2+6x-4}\ge 2^{-2x^2-2x+1}$

$2x^2+6x-4\ge -2x^2-2x+1 \quad \to \quad 4x^2+8x-5\ge 0 \quad \to \quad x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\infty\right)$

Т.к. $x<0$, то $x\in x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Вариант 4 С3

Решите неравенство: $\dfrac{\log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}} \ge 0$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ 2-x>0 \\ 3-2x>0 \\ \log_5(2x-1) \ne -\log_5(3-2x) \end{cases} \to \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ x<2 \\ x<\dfrac{3}{2} \\ 6x-3-4x^2+2x-1 \ne 0 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2} \\ x \ne 1 \end{cases}$$

Теперь само неравенство:

$$\frac{\log_5(2x-1)+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_5(3-2x)} \ge 0$$

$$\frac{\log_5(4x-2x^2-2+x)}{\log_5(6x-4x^2-3+2x)} \ge 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2x^2-5x-2 \le 1 \\ -4x^2+8x-3<1 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x^2-5x-2 \ge 1 \\ -4x^2+8x-3>1 \end{cases} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2+5x+3 \ge 0 \\ 4x^2-8x+4>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2+5x+3 \le 0 \\ 4x^2-8x+4<0 \end{cases} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right) \ge 0 \\ (x-2)>0 \end{cases} \\ \text{нет решений} \end{array}\right. \to$$

$$\begin{cases} x \le 1, x \ge \dfrac{3}{2} \\ x \ne 2 \end{cases}$$

С учетом ограничений получаем $\dfrac{1}{2}<x<1$

Ответ: $\dfrac{1}{2}<x<1$

Вариант 5 С5

Решите неравенство: $log_{2x+3} x^2 < 1$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 2x+3 > 0 \\ 2x+3 \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -\dfrac{3}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Теперь само неравенство:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+3 > 1 \\ x^2 < 2x+3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3 < 1 \\ x^2 > 2x+3 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1 \\ -1 < x < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1 \\ x < -1, x > 3 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 3 \\ x < -1 \end{array}\right.$$

С учетом ограничений получаем: $x \in \left(-\dfrac{3}{2};-1\right) \cup (-1{,}0) \cup (0;3)$

Ответ: $x \in \left(-\dfrac{3}{2};-1\right) \cup (-1{,}0) \cup (0;3)$

Вариант 6 С3

Решите неравенство: $log_x\left(log_9(3^x-9)\right)<1$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ log_9(3^x-9)>0 \\ 3^x-9>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 3^x-9>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x>log_3 10 \end{cases} \rightarrow x>log_3 10$$

Теперь само неравенство:

Заметим, что т.к. $x>log_3 10$, то $x>1$, тогда $log_9(3^x-9)<x$.

$3^x-9<9^x$

$9^x-3^x+9>0$

$D=1-36<0$

т.е. неравенство выполнено при любом *x*.

Ответ: $x\in\left(log_3 10;\infty\right)$

Вариант 7 С3

Решите неравенство: $\dfrac{log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)}{x}\geq 1$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x\neq 0 \\ 3\cdot 2^{x-1}-1>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ 2^{x-1}>\dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x-1>-log_2 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x>log_2\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Теперь само неравенство:

$$\frac{log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)-x}{x}\geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)-x\geq 0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)-x\leq 0 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{3}{2}2^x-1\geq 2^x \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3}{2}2^x-1\leq 2^x \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1}{2}2^x\geq 1 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}2^x\leq 1 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 1 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 1 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x<0 \end{array}\right.$$

С учетом ограничений: $x\in\left(log_2\dfrac{2}{3};0\right)\cup\left[1;\infty\right)$

Ответ: $x\in\left(log_2\dfrac{2}{3};0\right)\cup\left[1;\infty\right)$

Вариант 8 С3

Решите неравенство:

$$log_5(x+2)+log_5(1-x)\le log_5((1-x)(x^2-8x-8))$$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ 1-x>0 \\ (1-x)(x^2-8x-8)>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<1 \\ x^2-8x-8>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<1 \\ x<4-2\sqrt{6}; \quad x>4+2\sqrt{6} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x\in\left(-2;\,4-2\sqrt{6}\right)$$

Теперь само неравенство:

$$log_5(x+2)(1-x)\le log_5((1-x)(x^2-8x-8))$$
$$(x+2)(1-x)\le(1-x)(x^2-8x-8)$$
$$(1-x)(x^2-9x-10)\ge 0$$
$$(x+1)(x-1)(x-10)\le 0$$
$$x\in(-\infty;-1]\cup[1;10]$$

С учетом ограничений: $x\in\left(-2;-1\right]$

Ответ: $x\in\left(-2;-1\right]$

Вариант 9 С3

Решите неравенство: $log_{\frac{x}{3}}\left(log_x \sqrt{3-x}\right) \geq 0$.

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3-x > 0 \\ x \neq 1 \\ log_x \sqrt{3-x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \\ x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \sqrt{3-x} < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ \sqrt{3-x} > 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \\ x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ x \neq 1 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \rightarrow 1 < x < 2$$

Заметим, что при этих условиях $0 < \dfrac{x}{3} < 1$

Тогда само неравенство:

$$log_x \sqrt{3-x} \leq 1 \rightarrow \sqrt{3-x} \geq x \rightarrow 3-x \geq x^2 \rightarrow x^2 + x - 3 \leq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

Окончательно: $x \in \left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$

Вариант 10 С3

Решите неравенство: $log_{x+1}(19+18x-x^2)-\frac{1}{16}log^2_{x+1}(x-19)^2 \ge 2$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\ne 1 \\ x\ne 19 \\ 19+18x-x^2>0 \end{cases} \to \begin{cases} x>-1 \\ x\ne 0 \\ x\ne 19 \\ -1<x<19 \end{cases} \to x\in(-1;0)\cup(0;19)$$

Теперь само неравенство:

$$log_{x+1}(x+1)+log_{x+1}(19-x)-\frac{1}{4}log^2_{x+1}(19-x)\ge 2$$

$$\frac{1}{4}log^2_{x+1}(19-x)-log_{x+1}(19-x)+1\le 0$$

$$\left(\frac{1}{2}log_{x+1}(19-x)-1\right)^2\le 0$$

$$log_{x+1}(19-x)=2$$

$$19-x=x^2+2x+1$$

$$x^2+3x-18=0$$

$$x=-6;3$$

С учетом ограничений $x=3$

Ответ: $x=3$

Вариант 2 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 + 4x + \left| x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \right| - a$$

Принимает только неотрицательные значения.

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2; -\frac{1}{2}$$

1) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right) \cup (2; \infty) \quad f(x) = 2x^2 + \frac{5}{2}x - 1 - a$

Т.к. ветви параболы $f(x)$ направлены вверх, вершина $x = -\frac{5}{8}$ для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$f\left(-\frac{5}{8} \right) \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{25}{32} - \frac{25}{16} - 1 - a \geq 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{57}{32} - a \geq 0 \quad \rightarrow \quad a \leq -\frac{57}{32}$$

2) $x \in \left(-\frac{1}{2}; 2 \right) \quad f(x) = \frac{11}{2}x + 1 - a$

Функция $f(x)$ - возрастающая прямая, таким образом, для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы $f\left(-\frac{1}{2} \right) \geq 0$

$$-\frac{11}{4} + 1 - a \geq 0 \quad \rightarrow \quad a \leq -\frac{7}{4}$$

Ответ: $a \leq -\frac{57}{32}$

Вариант 3 С5

При каких а уравнение

$cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$

имеет ровно 8 корней?

$\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n \quad n \in Z$

$a^2 - x^2 = 4\pi^2 n^2 \quad n \in Z$

$x^2 = a^2 - 4\pi^2 n^2 \quad n \in Z$

$x^2 = a^2 - 4\pi^2 n^2 = a^2; a^2 - 4\pi^2; a^2 - 16\pi^2; a^2 - 36\pi^2 -$ *должны давать восемь искомых корней*

Необходимо чтобы $a^2 - 36\pi^2 > 0$, *а* $a^2 - 64\pi^2 < 0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 6\pi \\ a < -6\pi \end{array}\right. \\ -8\pi < a < 8\pi \end{cases} \Rightarrow a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$$

Ответ: $a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$

Вариант 4 С5

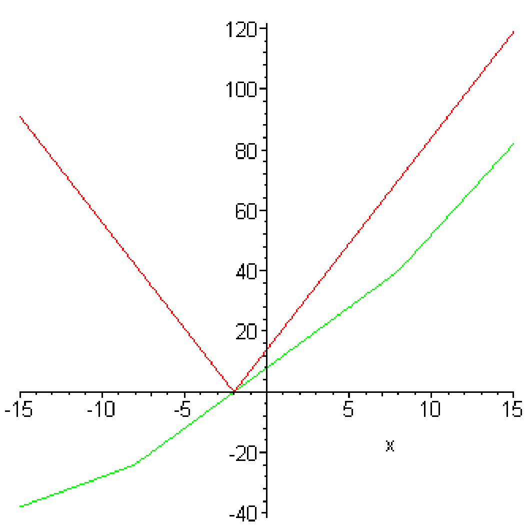
Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение
$3x+\left|2x+|a-x|\right|=7|x+2|$
имеет хотя бы один корень.

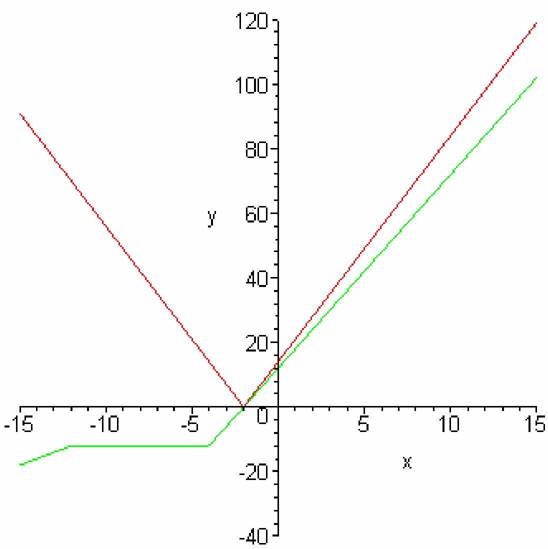
Рассмотрим функции
$f(x)=3x+\left|2x+|a-x|\right|$ и $g(x)=7|x+2|$

1. $x\ge a \quad\to\quad f(x)=3x+|3x-a|=\begin{cases}a, & x\le\dfrac{a}{3}\\ 6x-a, & x>\dfrac{a}{3}\end{cases}$

2. $x<a \quad\to\quad f(x)=3x+|x+a|=\begin{cases}2x-a, & x\le -a\\ 4x+a, & x>-a\end{cases}$

Заметим, что угловой коэффициент ломаной $g(x)$ равен 7 или -7, а ломаной $f(x)$ 2, 4 или 6 при $a>0$ и 0, 6 и 2 при $a<0$
На первом рисунке $a>0$, на втором - $a<0$





Для выполнения условия задачи необходимо:

$f(-2)=-6+\left|-4+|a+2|\right|\ge 0$

$\left|-4+|a+2|\right|\ge 6 \quad \left[\begin{array}{l}-4+|a+2|\ge 6\\ -4+|a+2|\le -6\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}|a+2|\ge 10\\ |a+2|\le -2\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a+2\ge 10\\ a+2\le -10\end{array}\right.\\ \text{невозможно}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}a\ge 8\\ a\le -12\end{array}\right.$

Ответ: $a\in(-\infty;-12]\cup[8;\infty)$

Вариант 5 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$5x-|3x-|x+a||=10|x-2|$

имеет хотя бы один корень.

Рассмотрим функции

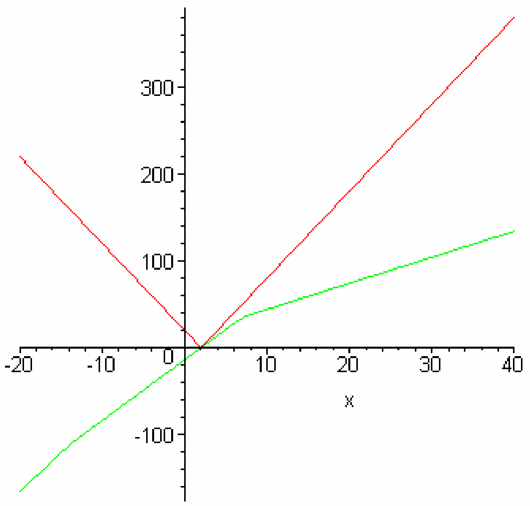
$f(x)=5x-|3x-|x+a||$ и $g(x)=10|x-2|$

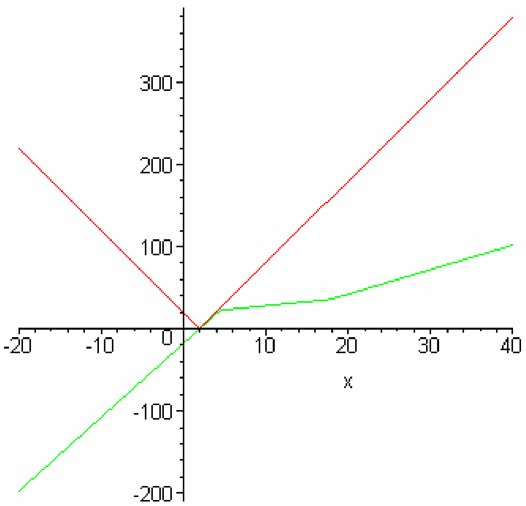
1. $x \ge -a \quad \to \quad f(x)=5x-|2x+a|=\begin{cases} 7x-a, & x \le -\dfrac{a}{2} \\ 3x-a, & x > -\dfrac{a}{2} \end{cases}$

2. $x < -a \quad \to \quad f(x)=5x-|4x-a|=\begin{cases} 9x+a, & x \le \dfrac{a}{4} \\ x+a, & x > \dfrac{a}{4} \end{cases}$

Заметим, что угловой коэффициент ломаной $g(x)$ равен 10 или -10, а ломаной $f(x)$ 7, 3 или 1 при $a>0$ и 3, 9 и 1 при $a<0$

На первом рисунке $a>0$, на втором - $a<0$





Для выполнения условия задачи необходимо:

$f(2)=10-|6-|a+2||\ge 0$

$|6-|a+2||\le 10$

$-10\le 6-|a+2|\le 10$

$-16\le -|a+2|\le 4 \quad \to \quad -4\le |a+2|\le 16 \quad \to \quad -16\le a+2\le 16 \quad \to \quad -18\le a\le 14$

Ответ: $a\in[-18;14]$

Вариант 6 С5

Найдите все такие *a*, что наименьшее значение функции
$f(x) = 4|x-a| + |x^2+2x-3|$ меньше 4.

Варианты раскрытия модулей:

$$f(x) = 4x - 4a + x^2 + 2x - 3 = x^2 + 6x - 4a - 3$$

$$f(x) = -4x + 4a + x^2 + 2x - 3 = x^2 - 2x + 4a - 3$$

$$f(x) = -4x + 4a - x^2 - 2x + 3 = -x^2 - 6x + 4a + 3$$

$$f(x) = 4x - 4a - x^2 - 2x + 3 = -x^2 + 2x - 4a + 3$$

Наименьшее значение этой функции может быть либо в вершине параболы, либо в граничных точках, т.е. $x=-1,\ x=1,\ x=-3,\ x=a$, или в минимумах функций, получающихся при раскрытии модулей, т.е. опять же в точках $x=1,\ \ x=-3$.

Тогда для выполнения условия задачи необходимо

$$\left[\begin{array}{l} f(-1)<4 \\ f(1)<4 \\ f(-3)<4 \\ f(a)<4 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 4|-1-a|+4<4 \\ 4|1-a|<4 \\ 4|-3-a|<4 \\ |a^2+2a-3|<4 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} |-1-a|<0 \\ -1<1-a<1 \\ -1<-3-a<1 \\ -4<a^2+2a-3<4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \\ 0<a<2 \\ -4<a<-2 \\ \begin{cases} a^2+2a-7<0 \\ a^2+2a+1>0 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<a<2 \\ -4<a<-2 \\ -1-2\sqrt{2}<a<-1+2\sqrt{2}, \quad a\neq -1 \end{array}\right.$$

Итого: $a \in (-4; -1) \cup (-1; 2)$

Вариант 7 С5

При каких а уравнение

$$sin\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 0$$

имеет ровно 8 корней?

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \pi n \quad n \in Z$$

$$a^2 - x^2 = \pi^2 n^2 \quad n \in Z$$

$$x^2 = a^2 - \pi^2 n^2 \quad n \in Z$$

$$x^2 = a^2 - \pi^2 n^2 = a^2; a^2 - \pi^2; a^2 - 4\pi^2; a^2 - 9\pi^2 - \text{должны}$$

давать восемь искомых корней

Необходимо чтобы $a^2 - 9\pi^2 > 0, a \; a^2 - 16\pi^2 < 0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 3\pi \\ a < -3\pi \end{array}\right. \\ -4\pi < a < 4\pi \end{cases} \Rightarrow a \in (-4\pi; -3\pi) \cup (3\pi; 4\pi)$$

Ответ $: a \in (-4\pi; -3\pi) \cup (3\pi; 4\pi)$

Вариант 8 С5

Найдите все значения *а*, при каждом из которых общие решения неравенств $y+2x \geq a$ и $y-x \geq 2a$ являются решениями неравенства $2y-x > a+3$.

Найдем точку пересечения прямых $y=-2x+a$ и $y=x+2a \rightarrow x_0=-\frac{a}{3};\ y_0=\frac{5a}{3};$

Решением системы заданных неравенств будет область, расположенная выше каждой их этих прямых.

Угловой коэффициент прямой $y=\frac{x}{2}+\frac{a+3}{2}$ равен ½, для выполнения условия задачи достаточно выполнения условия:

$$\frac{x_0}{2}+\frac{a+3}{2}<y_0$$

$$x_0+a+3<2y_0$$

$$-\frac{a}{3}+a+3<\frac{10a}{3}$$

$$-a+3a+9<10a$$

$$8a>9$$

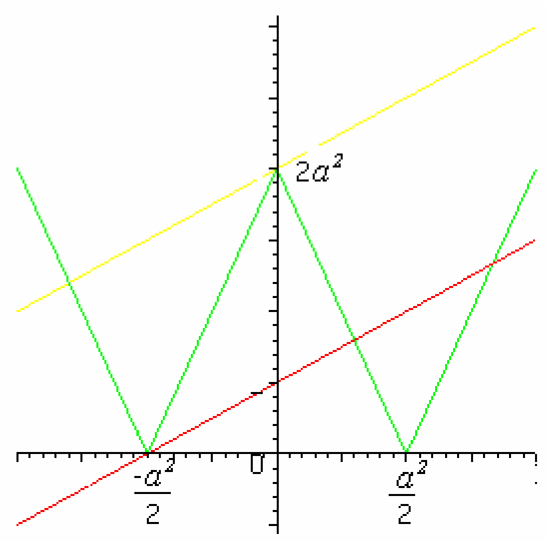
$$a>\frac{9}{8}$$

Ответ: $a>\frac{9}{8}$

Вариант 9 С5

Найдите все значения *а*, при каждом из которых функция $f(x)=2\left|2|x|-a^2\right|-x+a$ имеет ровно три нуля функции.

Рассмотрим схематические графики двух функций: $g(x)=2\left|2|x|-a^2\right|$, $f(x)=x-a$



На рисунке отмечены два положения прямой $f(x)$, при которых графики данных функций имеют три точки пересечения, т.е. выполняется условие задачи.
Аналитически (подставляя в исходное уравнение):

$$1)\quad f(0)=2a^2 \quad\to\quad 2\left|0-a^2\right|-0+a=0;\to 2a^2+a=0 \quad\to\quad a=0;\ a=-\frac{1}{2};$$

$$2)\quad f\left(-\frac{a^2}{2}\right)=0 \quad\to\quad 0+\frac{a^2}{2}+a=0; \quad\to\quad a=0;\ a=-2;$$

Заметим, что при $a=0 \quad\to\quad 4|x|=x$ - не может иметь трех корней.

Ответ: $a=-\frac{1}{2};\quad a=-2.$

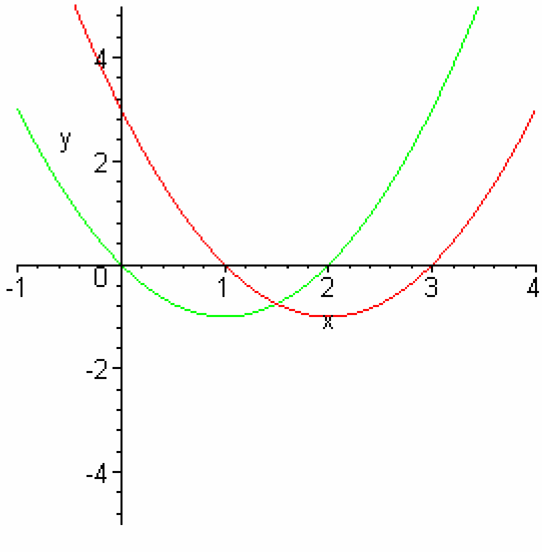
Вариант 10 С5

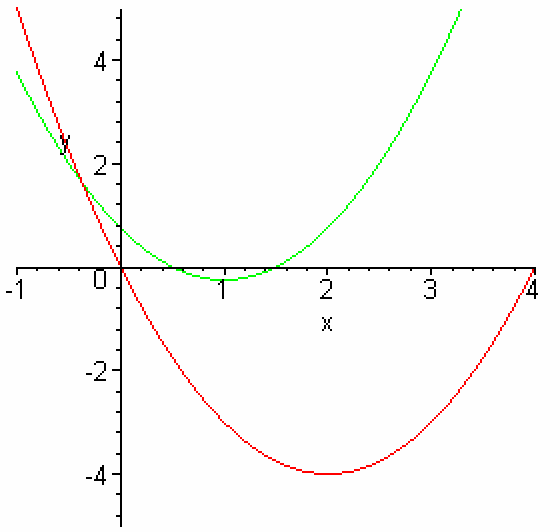
Найдите все значения *а*, при каждом из которых общие решения неравенств $x^2-2x\le a-1$ и $x^2-4x\le 1-4a$ образуют на числовой оси отрезок длиной единица.

$$\begin{cases}x^2-2x\le a-1\\ x^2-4x\le 1-4a\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-2x+1-a\le 0\\ x^2-4x-1+4a\le 0\end{cases}\quad \begin{cases}(x-1)^2-a\le 0\\ (x-2)^2+4a-5\le 0\end{cases}$$

Очевидно, что для выполнения условия необходимо $a\ge 0;\quad 5-4a\ge 0;\quad \to\quad a\in\left[0;\frac{5}{4}\right]$

Для выполнения условия задачи возможно три случая взаимного расположения парабол





Для первого случая разность большего корня уравнения $(x-1)^2-a=0$ и меньшего корня уравнения $(x-2)^2+4a-5=0$ должна равняться 1.

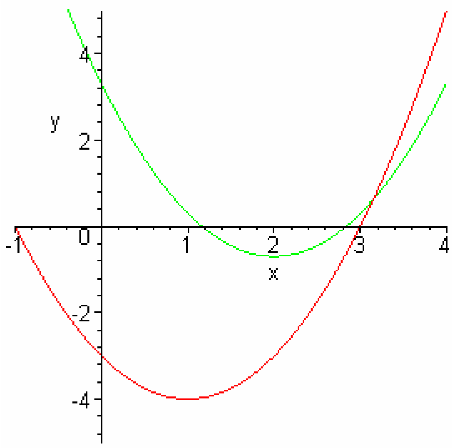
Т.е. $1+\sqrt{a}-\left(2-\sqrt{5-4a}\right)=1;\quad \sqrt{a}+\sqrt{5-4a}=2;\quad 5-4a=4-4\sqrt{a}+a;$

$5a-4\sqrt{a}-1=0\quad \to\quad \sqrt{a}=1\quad \to\quad a=1;$

Для второго случая разность корней первого уравнения должна быть равна 1.

Т.е. $\sqrt{a}=\frac{1}{2};\quad \to\quad a=\frac{1}{4};$ Корни первого уравнения будут равны 0,5 и 1,5;корни второго уравнения будут равны 0 и 4, т.е. условия выполняются.

В принципе, необходимо рассмотреть еще один случай:



Тогда разность корней второго уравнения должна быть равна 1, при этом $a = \frac{19}{16}$;

И еще должно выполняться условие $2+\sqrt{5-4a} \le 1+\sqrt{a}$, тогда

$-1+\sqrt{\frac{19}{16}} \ge \sqrt{5-\frac{19}{4}} \quad \rightarrow \quad \frac{-4+\sqrt{19}}{4} \ge \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{19} \ge 6$, что невозможно.

Ответ: $a = 1; \quad a = \frac{1}{4};$