МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.А. Прокофьев

Пособие по геометрии для подготовительных курсов

(планиметрия)

Москва 2003

УДК 514(075)

Рецензенты:
к.ф.-м.н., заведующий кафедрой высшей математики №2 МИЭТ Кальней С.Г.,
методист по математике Зеленоградского ОМК Ковыров А.А.

Прокофьев А.А.

Пособие по геометрии для подготовительных курсов (планиметрия). – 3-е изд., перераб. и доп., – М.: МИЭТ, 2003, 216 стр.

Пособие содержит необходимые теоретические сведения, примеры решения типовых задач и большое количество задач для самостоятельного решения. Задачи, собранные под одним заголовком, как правило, расположены в порядке возрастающей трудности. В начале каждого параграфа расположены основные типовые задачи. В пособии содержатся задачи разных уровней сложности. Многие из них взяты из вариантов вступительных экзаменов в различные вузы (МГУ, МФТИ, МИЭТ и др.) для того, чтобы учащиеся могли оценить уровень своих знаний и степень подготовки к сдаче вступительного экзамена. Пособие будет полезно школьникам старших классов, учителям общеобразовательных школ, а также тем, кто готовится к поступлению в высшие учебные заведения.

Прокофьев Александр Александрович

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для слушателей подготовительных курсов, а также для школьников, готовящихся к поступлению в высшие учебные заведения, и призвано в интенсивной форме организовать повторение планиметрии, сосредоточить главные усилия учащихся на узловых вопросах программы, познакомить с характером и уровнем требований, предъявляемых к поступающим в Вузы.

Пособие написано в соответствии с программой по геометрии для поступающих в Вузы. В теоретической части определяются понятия, формулируются основные факты и теоремы, которые выпускник должен знать по этому разделу, а также даются примеры основных приемов решения задач. Во второй части содержится большое количество задач для аудиторной и самостоятельной работы. Вторая часть пособия содержит 15 параграфов. Внутри каждого параграфа задачи близкие по содержанию или методу решения объединены одним номером. Задачи, как правило, расположены в порядке возрастания трудности, причем основные типовые и опорные задачи расположены в начале каждого параграфа.

Читателю рекомендуется уделить внимание задачам на построение, поскольку задачи этого типа в большей мере способствуют развитию пространственного воображения и усвоению большинства идей и методов геометрии. Задач на доказательство в пособии существенно меньше, чем задач на вычисление, но их выполнение также очень полезно, поскольку они отражают те или иные основные свойства фигур, знание которых будет полезно при решении задач на вычисление.

Ко всем задачам пособия даны ответы, а к некоторым еще и указания. В теоретической части при решении задач и проведении доказательств использованы значки:

□ – указывает на начало решения или доказательства;

� – указывает на завершение решения или доказательства.

Автор надеется, что данное пособие окажет существенную помощь абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам.

Желаю успеха!

Программа по геометрии для поступающих в Вузы

Настоящая программа состоит из трех разделов.

В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий как на письменном, так и на устном экзамене.

Второй раздел представляет собой перечень вопросов теоретической части устного экзамена. При подготовке к письменному экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений из этого раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на письменном и устном экзаменах.

Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. ***Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающим, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать***.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные утверждения второго раздела могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти утверждения.

I. Основные математические понятия и факты

Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.

Примеры преобразования фигур, виды симметрии. Преобразование подобия и его свойства.

Векторы. Операции над векторами.

Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.

Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.

Центральные и вписанные углы.

Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.

Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.

Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.

Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.

Параллельность прямой и плоскости.

Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.

Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.

Многогранники. Их вершины, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы; пирамиды. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды, их виды.

Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.

Формулы площади поверхности и объема призмы.

Формулы площади поверхности и объема пирамиды.

Формулы площади поверхности и объема цилиндра.

Формулы площади поверхности и объема конуса.

Формулы объема шара.

Формулы площади сферы.

II. Основные формулы и теоремы

Свойства равнобедренного треугольника. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка. Признаки параллельности прямых.

Сумма углов треугольника. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника.

Признаки параллелограмма, его свойства.

Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник. Касательная к окружности и ее свойство. Измерение угла, вписанного в окружность. Признаки подобия треугольников. Теорема Пифагора.

Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.

Признак параллельности прямой и плоскости.

ёёёПризнак параллельности плоскостей.

Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.

Перпендикулярность двух плоскостей.

Теоремы о параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Теорема о трех перпендикулярах.

III. Основные умения и навыки

Экзаменующийся должен уметь:

Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости.

Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии – при решении геометрических задач.

Проводить на плоскости операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число) и пользоваться свойствами этих операций.

Глава 1. Введение в планиметрию

§ 1. Основные понятия

Планиметрия – раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур, расположенных в одной плоскости. Под г***еометрической фигурой*** понимается любое множество точек.

Всякое аксиоматическое построение геометрии включает в себя:

1) список основных неопределяемых понятий (объектов, отношений и т.д.);

2) список утверждений, не подлежащих доказательству (***аксиом***);

3) определения других, более сложных понятий;

4) формулировки и доказательства других утверждений (теорем, следствий и т.д.).

Теорема – утверждение, имеющее большое теоретическое значение.

Следствие – утверждение, которое сравнительно просто выводится из другого утверждения.

Так как в разных школах при изучении планиметрии в основном используются учебники А.В. Погорелова «Геометрия 7-11» или Л.С. Атанасяна «Геометрия 7-9», приведем трактовку основных понятий и формулировку аксиом, используемых названными авторами.

Аксиоматика А.В. Погорелова

Основные, неопределяемые понятия: ***точка***, ***прямая***, ***«лежать между»*** (для точек одной прямой), ***принадлежность***. ***Прямая*** – некоторое множество точек. ***Плоскость*** – множество всех точек.

Аксиомы:

Основные свойства принадлежности точек и прямых на плоскости:

I. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Отрезок – часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками.

Основное свойство расположения точек на прямой:

II. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Основное свойство измерения отрезков:

III. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

Основное свойство расположения точек относительно прямой на плоскости:

IV. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Отрезок, соединяющий две точки одной полуплоскости, не пересекает прямую, а отрезок, соединяющий две точки разных полуплоскостей, пересекает прямую.

Полупрямая (***луч***) – часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки.

Угол – фигура, состоящая из точки – ***вершины угла*** и двух различных полупрямых, исходящих из этой точки, – ***сторон угла.***

Основные свойства измерения углов:

V. Каждый угол имеет определенную *градусную меру,* большую нуля. ***Развернутый угол*** равен $180°$. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

Основные свойства откладывания отрезков и углов:

VI. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

VII. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей $180°$, и только один.

Треугольник – фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Два отрезка называются ***равными***, если они имеют одинаковую длину. Два угла называются ***равными***, если они имеют одинаковую угловую меру в градусах.

Треугольники называются ***равными***, если у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы также равны.

Основные свойства простейших фигур:

VIII. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник, расположенный заданным образом относительно данной полупрямой.

Две прямые называются ***параллельными***, если они не имеют общих точек.

Основное свойство параллельных прямых:

IX. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

Аксиоматика Л.С. Атанасяна

Основные, неопределяемые понятия: ***точка, прямая, длина отрезка, наложение.*** Неопределяемое отношение: ***лежать между*** (для трех различных точек одной прямой).

Аксиомы:

1) Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.

2) Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

3) Через любые две различные точки проходит прямая, и притом только одна.

4) Из трех различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

5) Каждая точка O прямой разбивает ее на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O.

Примечание: точки A и B лежат по одну сторону от точки O, если A, B, O – различные точки одной прямой и O лежит между A и B.

6) Каждая прямая разделяет плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой a.

Примечания: а) ***плоскость*** – множество всех точек; б) ***отрезок*** AB – множество точек прямой AB, состоящее из точек A, B и всех точек, лежащих между A и B; в) точки плоскости A и B лежат по одну сторону от прямой a, если отрезок AB не имеет общих точек с прямой a.

7) Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

Примечания: а) предполагается, что наложение является взаимно однозначным отображением плоскости на себя; б) две фигуры называются ***равными***, если существует наложение, переводящее одну из них в другую.

8) На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

9) От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному, и притом только один.

10) Любой угол $\angle(a, b)$ (a и b – его стороны) можно совместить наложением с равным ему углом $\angle(c, d)$ двумя способами: а) a совместить с c, b с d; б) a совместить с d, b с c.

11) Любая фигура равна самой себе.

12) Если фигура Φ равна фигуре Φ', то Φ' равна Φ.

13) Если фигура Φ равна фигуре Φ', а Φ' равна фигуре Φ'', то Φ равна Φ''.

14) При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.

Примечания: 1) В качестве единицы измерения может быть выбран любой отрезок, длина его по определению считается равной 1.

2) Предполагается, что каждому отрезку приписано некоторое действительное число, называемое ***длиной*** этого ***отрезка*** (процесс измерения отрезков находится вне пределов данной аксиоматики, хотя может быть также описан аксиомами).

15) При выбранной единице измерения отрезков для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

16) Через точку плоскости, не лежащую на данной прямой, проходит одна и только одна прямая, параллельная данной (т.е. не имеющая с ней общих точек).

Примечание: эта аксиома называется ***аксиомой параллельности Евклида*** или ***пятым постулатом Евклида***.

Дальнейшее изложение курса не привязано к какому-то конкретному учебнику и является общим.

§ 2. Луч, отрезок, угол

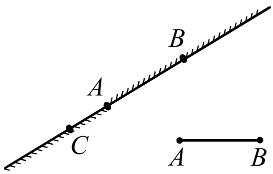


Рис. 1

Луч с вершиной A – часть прямой, состоящая из точек, лежащих по одну сторону от A. Если A – точка прямой, а точки B и C лежат на этой прямой по разные стороны от A (см. рис. 1), то возникают два луча с вершиной A. Они называются ***противоположными*** или ***дополнительными*** лучами. Часто их обозначают $[AB)$ и $[AC)$.

Отрезок AB – часть прямой, состоящая из точек A, B и всех точек, лежащих между A и B. Точки A и B – концы отрезка. Для отрезка AB часто используют обозначение $[AB]$.

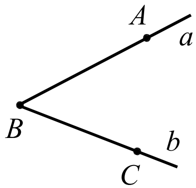


Рис. 2

Угол – фигура, состоящая из двух лучей с общей вершиной. Обозначение: $\angle(a, b)$ или $\angle ABC$ (см. рис. 2). Общая вершина лучей – ***вершина угла.*** Лучи a и b – ***стороны угла***. ***Внутренность угла*** (или ***внутренняя область угла***) – часть плоскости, ограниченная сторонами угла.

Примечание: иногда углом называют его внутреннюю область.

Смежные и вертикальные углы

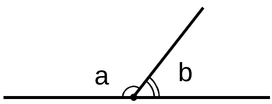


Рис. 3

Углы, у которых одна сторона общая, а две другие являются взаимно противоположными лучами, называются ***смежными*** углами (см. рис. 3).

Теорема. ***Величины смежных углов в сумме составляют*** $180°$ ***:*** $\alpha + \beta = 180°$**.**

Следствия.

1. Если два угла равны, то смежные с ними углы равны.

2. Если угол не развернутый, то его градусная мера меньше $180°$.

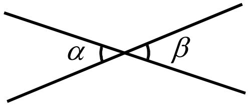


Рис. 4

Углы называются ***вертикальными***, если стороны одного угла являются противоположными лучами, сторон другого (см. рис. 4).

Теорема. ***Вертикальные углы равны между собой:*** $\alpha = \beta$.

Развернутый угол – угол, стороны которого являются взаимно противоположными лучами (см. рис. 5). Величина развернутого угла равна $180°$ или π радиан.

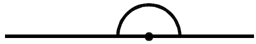


Рис. 5

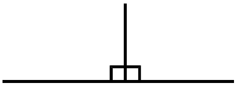


Рис. 6

Прямой угол – угол, равный смежному с ним углу (см. рис. 6). Величина прямого угла равна $90°$ или $\frac{\pi}{2}$ радиан.

Острый угол – угол, меньший прямого: $\alpha < 90°$, ***тупой*** угол – угол, больший прямого: $\alpha > 90°$.

При пересечении двух прямых образуется несколько пар ***смежных*** и ***вертикальных*** углов:
$\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 2$ и $\angle 3$, $\angle 3$ и $\angle 4$, $\angle 4$ и $\angle 1$ – смежные углы (см. рис. 7);
$\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные углы (см. рис. 7).

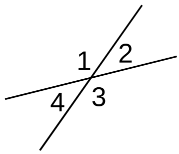


Рис. 7

Угол между прямыми – наименьший из углов, образованных лучами, полученными при пересечении этих прямых. Этот угол может быть лишь острым или прямым.

Величина угла. Углы можно измерять в ***градусах*** или ***радианах.*** Один градус ($1°$) – $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла.

Радиан – центральный угол, у которого соответствующая дуга окружности равна по длине радиусу.

Связь между градусной и радианной мерой угла: если угол содержит $x°$ и α радиан, то $x = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180°$; $\alpha = \frac{\pi x°}{180°}$.

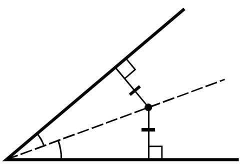


Рис. 8

Биссектриса угла – луч, исходящий из вершины угла, проходящий между его сторонами и делящий угол пополам.

Свойство биссектрисы. ***Точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от сторон угла*** (см. рис. 8).

§ 3. Перпендикулярность и параллельность прямых на плоскости

Перпендикулярные прямые – прямые, угол между которыми равен $90°$. Обозначение: $a \perp b$.

Теорема. ***Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и эта прямая единственна.***

Перпендикуляром из точки к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, который имеет одним из своих концов их точку пересечения, называемую ***основанием*** перпендикуляра, а другой совпадает с данной точкой.

Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется ***расстоянием от точки до прямой.***

Теорема 1. ***Из любой точки прямой можно восставить перпендикуляр к этой прямой, и этот перпендикуляр единствен.***

2. ***Из любой точки вне прямой можно опустить перпендикуляр на эту прямую, и этот перпендикуляр единствен.***

Пусть AB – прямая, M_0 – основание перпендикуляра, опущенного на нее из точки M (см. рис. 9). Возьмем на AB произвольную точку C, отличную от M_0, и соединим с точкой M. Полученная прямая образует с AB углы, отличные от прямого, и называется ***наклонной***. Через точку M можно провести бесчисленное множество наклонных. Точка C называется ***основанием наклонной***. Отрезок M_0C между основаниями перпендикуляра и наклонной, проведенных из точки M к прямой AB, называется ***проекцией наклонной***.

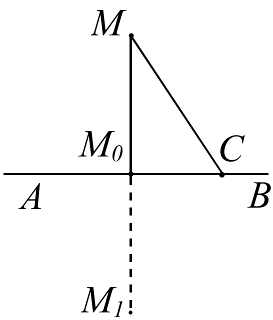


Рис. 9

Примечание. В более узком смысле наклонной называется отрезок MC (см. рис. 9).

Точки M и M_1 называются ***симметричными относительно прямой*** AB, если они расположены на прямой перпендикулярной AB и $MM_0 = M_0M_1$ (см. рис. 9).

Свойства наклонных:

1. ***Если из данной точки M к одной и той же прямой AB проведены перпендикуляр и наклонная, то наклонная длиннее перпендикуляра.***

2. ***Из двух наклонных, проведенных из одной точки, больше та, которая имеет большую проекцию***, т.е. основание которой дальше отстоит от основания перпендикуляра.

3. ***Если две различные наклонные, проведенные к прямой AB из одной и той же точки M, равны, то их основания лежат по разные стороны от основания перпендикуляра, опущенного на AB из той же точки, на равных расстояниях от него.***

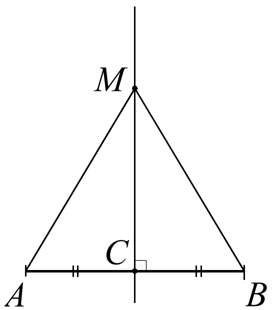


Рис. 10

Прямая, перпендикулярная к отрезку и проходящая через его середину, называется ***серединным перпендикуляром*** к данному отрезку.

Теорема (свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку в его середину). ***Перпендикуляр, проведенный к отрезку в его середину, является геометрическим местом точек, равноотстоящих от концов отрезка.***

Так, если $M -$ произвольная точка перпендикуляра восстановленного из середины отрезка AB (см. рис. 10), то $MA = MB$.

Прямые (на плоскости) называются ***параллельными***, если они не имеют общих точек. Обозначение: $a \parallel b$ (см. рис. 11).

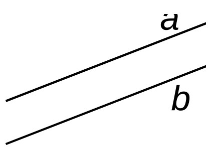


Рис. 11

Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой (см. определение на стр. 13).

Теорема 1. ***Через точку, не лежащую на данной прямой можно провести параллельную ей прямую, и только одну.***

Теорема 2. ***Два перпендикуляра к одной прямой параллельны или совпадают: $a \perp b$, $b \perp c \Rightarrow$ $a \parallel c$ или $a = c$.***

Теорема 3. ***Если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.***

Свойства параллельных прямых:

(1) ***Две прямые, параллельные одной и той же прямой, параллельны между собой или совпадают:*** $a \parallel c$, $b \parallel c$ $\Rightarrow$ $a \parallel b$ ***или*** $a = b$**.**

(2) ***Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.***

Углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей

Пусть a и b – прямые (не обязательно параллельные) и c – прямая, пересекающая a и b (см. рис. 12). Прямая c по отношению к прямым a и b называется ***секущей.*** В этом случае возникает несколько пар углов, названия которых следующие:

$\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ – ***внутренние накрест лежащие;***

$\angle 5$ и $\angle 6$, $\angle 7$ и $\angle 8$ – ***внешние накрест лежащие;***

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 7$ – ***соответственные;***

$\angle 1$ и $\angle 4$, $\angle 2$ и $\angle 3$ – ***внутренние односторонние;***

$\angle 5$ и $\angle 8$, $\angle 6$ и $\angle 7$ – ***внешние односторонние***.

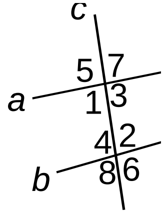


Рис. 12

Теорема. ***Прямые*** a ***и*** b ***параллельны тогда и только тогда, когда они образуют с секущей*** c :

(1) ***равные между собой внутренние (или внешние) накрест лежащие углы:*** $a \parallel b \Leftrightarrow \angle 1 = \angle 2$; $a \parallel b \Leftrightarrow \angle 5 = \angle 6$ и т.д.;

(2) ***равные между собой соответственные углы:*** $a \parallel b \Leftrightarrow \angle 4 = \angle 5$ и т.д.;

(3) ***внутренние (или внешние) односторонние углы, сумма которых равна*** 180° : $a \parallel b \Leftrightarrow \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$; $a \parallel b \Leftrightarrow \angle 6 + \angle 7 = 180^\circ$ и т.д.

Углы с параллельными или перпендикулярными сторонами

Для углов с соответственно параллельными сторонами справедливы следующие предложения:

1. ***Если стороны*** a ***и*** b ***одного угла соответственно параллельны сторонам*** a_1 ***и*** b_1 ***другого угла и одинаково направлены, то углы равны*** (см. рис. 13а).

2. ***Если при одном и том же условии параллельности стороны*** a ***и*** b ***одного угла направлены противоположно сторонам*** a_1 ***и*** b_1 ***другого угла, то углы равны*** (см. рис. 13б) **.**

3. ***Если стороны a и a_1 параллельны и одинаково направлены, а стороны b и b_1 параллельны и противоположно направлены, то***

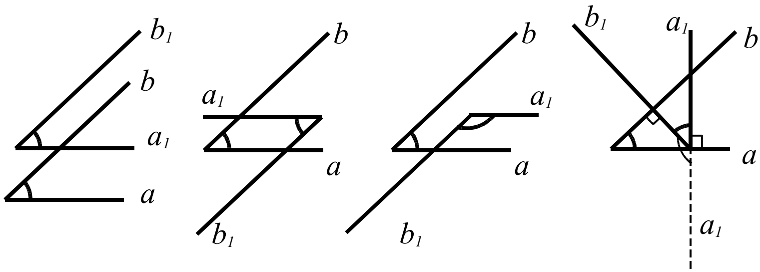


Рис. 13а Рис. 13б Рис. 13в Рис. 13г

углы дополняют друг друга до развернутого (см. рис. 13в).

Для углов с соответственно перпендикулярными сторонами справедлива теорема: ***углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны или дополняют друг друга до развернутого*** (см. рис. 13г)**.**

§ 4. Равенство и подобие фигур

Преобразованием одной ***фигуры*** в другую называется правило, по которому каждой точке первой фигуры ставится в соответствие единственная точка второй фигуры.

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется ***движением*,** если расстояние между любыми двумя точками первой фигуры равно расстоянию между соответствующими точками второй фигуры.

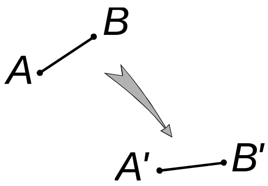


Рис. 14

В общем случае ***движение*** – взаимно однозначное отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояния между любыми точками: если $A \to A'$ и $B \to B'$, то $AB = A'B'$ (см. рис. 14).

Равные фигуры – фигуры, которые могут быть переведены друг в друга некоторым движением.

Виды преобразований фигур на плоскости

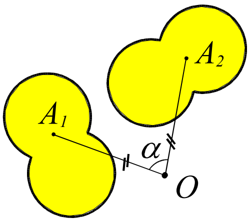


Рис. 15

Поворот

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется ***поворотом*** на угол α относительно точки O, если каждой точке A_1 этой фигуры ставится в соответствие такая точка A_2, что A_1 и A_2 равноудалены от заданной точки O (***центра поворота***) и угол A_1OA_2 равен заданному углу (***углу поворота***) (см. рис. 15).

Параллельный перенос

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется ***параллельным переносом*** на вектор $\vec{a}$, если каждой точке A_1 этой фигуры ставится в соответствие такая точка A_2, что вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ равен заданному вектору $\vec{a}$ (***вектору переноса***) (см. рис. 16).

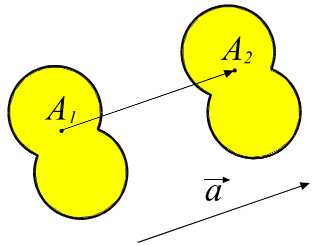


Рис. 16

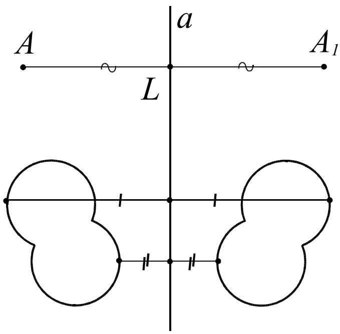


Рис. 17

Симметрия относительно прямой (оси)

Две точки A и A_1, расположенные по разные стороны от прямой a на одном и том же перпендикуляре к ней и на одинаковом расстоянии от основания L перпендикуляра, называются ***симметричными*** относительно прямой (оси) a.

Две фигуры называются ***симметричными*** относительно прямой (оси) a, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей относительно a точка другой фигуры. Аналогично определяется осевая симметрия двух частей и одной и той же фигуры (см. рис. 17).

Любые две фигуры, симметричные относительно какой-нибудь оси, равны. Однако для совмещения таких фигур в общем случае требуется переворот (вынос из плоскости) одной из них.

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется ***осевой симметрией*** с данной осью, если каждой точке этой фигуры ставится в соответствие точка, симметричная ей относительно данной оси.

Если многоугольник имеет ось симметрии, то каждая его вершина, не лежащая на оси симметрична некоторой другой его вершине.

Симметрия относительно точки (центра)

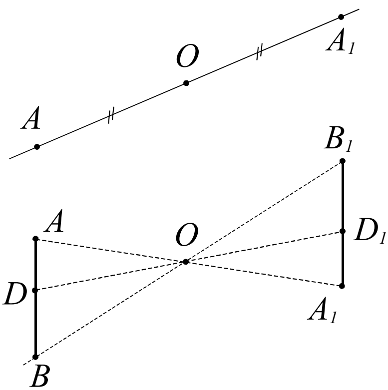


Рис. 18

Две точки A и A_1, расположенные на одной прямой с точкой O по разные стороны от нее на одинаковом расстоянии, называются ***симметричными*** относительно точки O (см. рис. 18). Точку O называют также ***центром симметрии***.

Если для двух точек A и B какой-нибудь прямой AB построить симметричные им относительно некоторой точки O точки A_1 и B_1, то $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 = AB$ и каждой точке D прямой AB соответствует симметричная ей относительно того же центра O точка D_1 на прямой A_1B_1.

Две фигуры называются симметричными относительно точки O, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей относительно центра симметрии O точка другой фигуры. Такая симметрия двух фигур называется ***центральной симметрией***.

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется ***центральной симметрией*** с центром в данной точке, если каждой точке этой фигуры ставится в соответствие точка, симметричная относительно данного центра.

Если каждой точке фигуры соответствует симметричная ей точка этой же фигуры, то говорят, что данная фигура имеет центр симметрии.

Если многоугольник имеет центр симметрии, то каждая его вершина симметрична некоторой другой его вершине.

Каждую фигуру можно совместить с фигурой ей центрально-симметричной путем ее поворота вокруг центра симметрии на $180°$. Центрально-симметричные фигуры можно совместить друг с другом без переворота, т.е. без выноса из плоскости.

Теоремы.

(1) ***Центральная симметрия является движением.***

(2) ***Осевая симметрия является движением.***

(3) ***Поворот является движением.***

(4) ***Параллельный перенос является движением.***

(5) ***При движении отрезок преобразуется в отрезок.***

(6) ***При движении треугольник преобразуется в равный ему треугольник.***

(7) ***При движении угол преобразуется в равный ему угол.***

(8) ***При движении многоугольник преобразуется в равный ему многоугольник.***

Преобразование подобия

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется ***преобразованием подобия***, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и тоже число раз: если $A \to A'$ и $B \to B'$, то $A'B' = k \cdot AB$ ($k > 0$), причем число $k -$ одно и то же для всех точек *A*, *B*. Число k называется ***коэффициентом подобия***.

Свойства преобразования подобия:

1. ***Преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки.***
2. ***Преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми.***

Подобие фигур. Две фигуры ***подобны,*** если существует ***преобразование подобия,*** переводящее одну из этих фигур в другую.

Из свойств преобразования подобия следует:

1. ***Если фигура F подобна фигуре F', а фигура F' подобна фигуре F'', то фигуры F и F'' подобны***.
2. ***У подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны.***

Два многоугольника называются ***подобными***, если они имеют соответственно равные углы и сходственные стороны их пропорциональны.

Сходственными сторонами называют стороны, лежащие против равных углов.

В записи подобия треугольников: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ – предполагается, что вершины совмещаемые преобразованием подобия, стоят на соответствующих местах, т.е. $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$.

Гомотетия

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется ***гомотетией*** (преобразованием центрального подобия) с данным центром точки O и коэффициентом подобия k, если каждой точке A_1 этой фигуры ставится в соответствие такая точка A_2, что $\overrightarrow{OA_2} = k\,\overrightarrow{OA_1}$.

Примечание. Коэффициент подобия k может принимать как положительные (см. рис. 19), так и отрицательные значения (см. рис. 20).

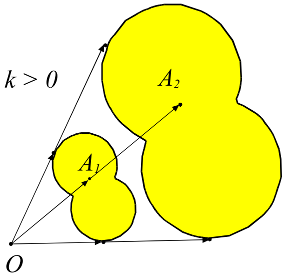


Рис. 19

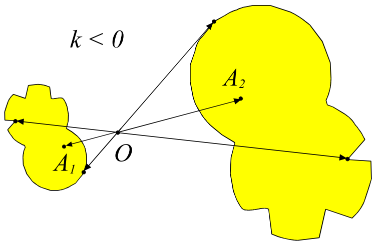


Рис. 20

Два подобных многоугольника называются ***гомотетичными***, если они расположены так, что сходственные их стороны параллельны. Прямые, которые соединяют вершины равных углов двух гомотетичных многоугольников, пересекаются в одной точке, называемой ***центром подобия*** (***центром гомотетии***).

Теоремы.

(1) ***При гомотетии отрезок преобразуется в отрезок.***

(2) ***При гомотетии угол преобразуется в равный ему угол.***

(3) ***При гомотетии многоугольник преобразуется в подобный ему многоугольник.***

Глава 2. Построения на плоскости

§ 1. Геометрические места (множества) точек на плоскости

Геометрическим местом точек называется множество всех точек, обладающих одним или несколькими общими свойствами. Например:

(1) Геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки плоскости, – окружность с центром в этой точке.

(2) Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек плоскости, – прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.

(3) Геометрическое место точек, равноудаленных от точек прямой l, – совокупность двух параллельных прямых, расположенных по разные стороны на равных расстояниях от прямой l.

(4) Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, – совокупность двух биссектрис углов, образованных этими прямыми (эти биссектрисы взаимно перпендикулярны).

(5) Геометрическое место точек, равноудаленных от двух параллельных прямых, – прямая, параллельная этим прямым, расположенная между ними на одинаковом расстоянии от них.

(6) Геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α, – совокупность двух дуг окружностей радиуса $R = \dfrac{AB}{2\sin\alpha}$. Если $\alpha = 90°$, то искомое геометрическое место – окружность с диаметром AB.

Геометрические места точек (1) – (6) могут быть построены с помощью циркуля и линейки.

(7) Пусть $k > 0, k \neq 1$ и A, B – фиксированные точки плоскости. Тогда геометрическое место точек M таких, что $MA : MB = k$, – окружность, центр которой лежит на прямой AB.

Для получения представления о геометрическом месте (множестве) точек часто бывает полезно составить уравнение этого множества. Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Задача. *Выяснить, что представляет собой множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до заданной точки и заданной прямой равна постоянному числу.*

Решение. □ Обозначим упоминающееся в задаче число буквой a.

Введем систему координат так, чтобы данная прямая l совпадала с осью абсцисс, а данная точка A лежала на оси ординат. Пусть $A(0;c)$. Если $M(x;y)$ – точка плоскости, а $N(x;0)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l, то условие задачи записывается так: $AM + MN = a$, т.е. $|y| + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a$. Ясно, что $c \le a$. Если $c = a$, то искомое множество есть отрезок $[0;c]$ оси Oy. Если $c < a$, то получаем:

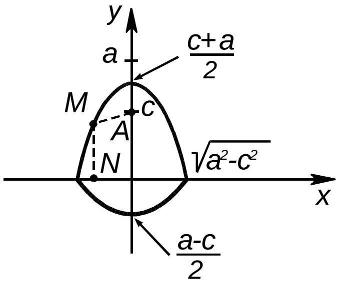


Рис. 1

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 + c^2 - a^2}{2(c-a)}, \text{ если } y > 0, \\ \dfrac{x^2 + c^2 - a^2}{2(c+a)}, \text{ если } y < 0. \end{cases}$$

Таким образом искомое множество состоит из двух дуг парабол (см. рис. 1). �

§ 2. Построения циркулем и линейкой

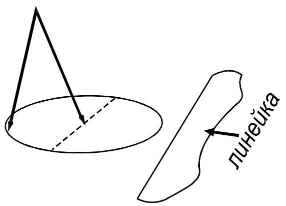


Рис. 2

В теории геометрических построений имеют дело с идеальными математическими инструментами ***циркулем*** и ***линейкой***. Циркуль позволяет строить окружность с центром в заданной точке радиуса, равного заданному отрезку. Линейка позволяет проводить прямую через две заданные точки. Таким образом, идеальная математическая линейка не имеет делений (с ее помощью нельзя отмерять отрезки заданной длины). Линейка односторонняя и имеет неограниченную длину (см. рис. 2). С помощью циркуля и линейки можно находить точки пересечения двух прямых, прямой и окружности, двух окружностей. Кроме того, при решении задач на построение мы вправе выбрать произвольную точку на какой-либо прямой, окружности, в области.

Решить задачу на построение – значит указать конечную последовательность основных построений, после выполнения которых искомая фигура уже будет считаться построенной в силу принятых аксиом.

Как правило, решение задачи на построение содержит следующие этапы решения:

анализ – здесь предполагается, что требуемый объект уже построен, и мы пытаемся из условий задачи получить необходимую информацию для выполнения построения;

построение – составление алгоритма, т.е. последовательности действий, в результате которых строится объект;

доказательство того, что данный объект обладает требуемыми свойствами и других объектов, удовлетворяющих условиям задачи, нет;

исследование – выяснение, при каких условиях задача имеет решения и сколько этих решений.

Простейшие задачи на построение

Следующие задачи относятся к числу простейших. Они часто используются при решении более сложных задачах в качестве звеньев цепочки построений.

(1) Построить отрезок, равный данному (т.е. на данной прямой от данной ее точки отложить в заданную сторону отрезок, равный данному отрезку).

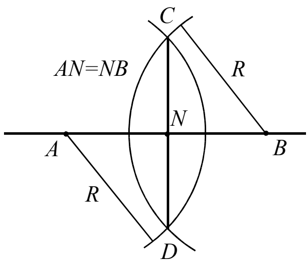


Рис. 3

(2) Разделить данный отрезок пополам.

Решение. □ Из концов A и B данного отрезка AB одним и тем же произвольным, но большим половины отрезка AB, радиусом R описываем две дуги, которые пересекаются в двух точках C и D. Точки C и D соединяем прямой CD. Точка N пересечения прямых AB и CD является искомой, делящей отрезок AB пополам (см. рис. 3). �

(3) Восставить перпендикуляр к данной прямой из данной точки на этой прямой.

Решение. □ Восстановим перпендикуляр из точки N. Построение можно выполнить, применяя прием, разобранный при решении предыду-

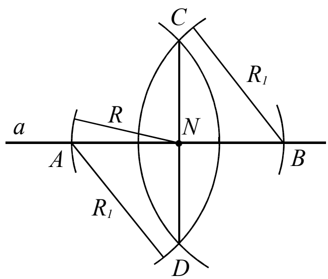


Рис. 4

щей задачи. На данной прямой a следует лишь отложить по обе стороны от точки N равные отрезки $AN = NB$, а затем повторить построения, используемые при делении отрезка пополам (см. рис. 4). ◆

(4) Опустить перпендикуляр из данной точки вне прямой на эту прямую.

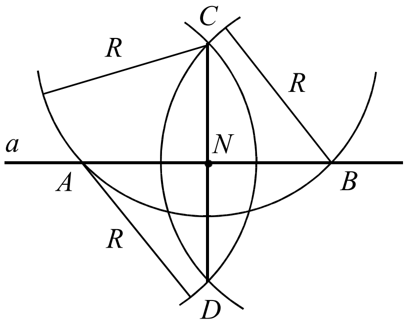


Рис. 5

Решение. □ Опустим перпендикуляр из точки C на прямую a. Построение можно выполнить, применяя построения предыдущего пункта. Достаточно получить на данной прямой a две точки A и B при помощи дуги с центром в точке C произвольного радиуса R большего, чем расстояние от точки C до прямой a, а дальше использовать прием деления отрезка пополам (см. рис. 5). ◆

(5) На луче MN в вершине M построить угол, равный заданному углу ABC.

Решение. □ Из вершины B описываем дугу KL произвольного радиуса и тем же радиусом из центра M проводим дугу, пересекающую луч MN в точке Q. Из точки Q радиусом, равным отрезку KL, проводим окружность, пересекающую первую в точке P. Полученную точку соединяем с вершиной M. Угол PMQ – искомый (см. рис. 6). ◆

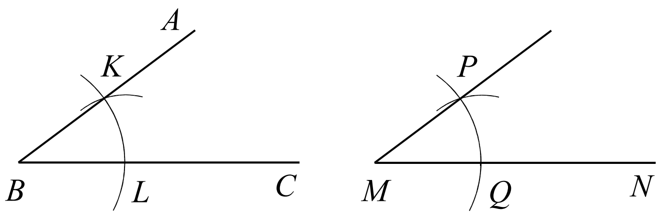


Рис. 6

(6) Через данную точку вне прямой провести прямую, параллельную этой прямой.

Решение. □ Пусть a – данная прямая, O – произвольная точка, не лежащая на этой прямой. Для решения задачи проведем дугу произвольным радиусом R с центром в точке O, пересекающую прямую a. Из точки пересечения B, лежащей на заданной прямой, как из центра, тем же радиусом R описываем дугу OA. Затем раствором циркуля радиуса AO из точки B проводим дугу, пересекающую первую в точке N. Прямые AB и ON параллельны (см. рис.7). �

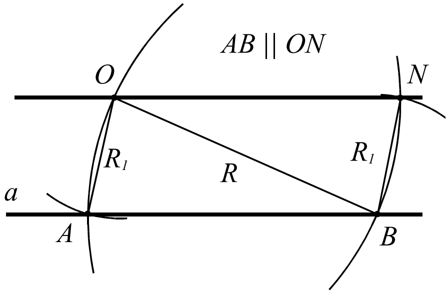


Рис. 7

(7) Разделить данный отрезок AB на данное число равных частей.

Решение. □ Проводим прямую ab, параллельную AB, на которой откладываем заданное число равных отрезков произвольной длины, например $ak = kl = lm = mn = nb$ (см. рис. 8). Далее, проводим прямые aA, bB и через точку их пересечения O проводим лучи kO, lO, mO, nO, которые и пересекут AB в точках K, L, M, N, делящих данный отрезок AB на заданное число равных частей (в данном примере на 5). �

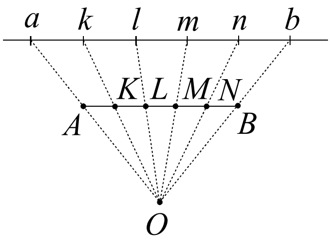


Рис. 8

(8) Данный отрезок разделить на части, пропорциональные данным величинам.

Решение. □ Построение аналогично построению, описанному в предыдущем примере. Для решения задачи следует на прямой ab отложить отрезки, длины которых равны данным величинам. �

(9) Разделить данный угол пополам.

Решение. □ Из вершины A произвольным радиусом проводим дугу DE. Из точек D и E ее пересечения со сторонами AB и AC описываем произвольными равными радиусами дуги ab, cd. Точку их пересечения F соединяем с A. Полученная прямая AF делит угол BAC пополам, т.е. является его биссектрисой (см. рис. 9). �

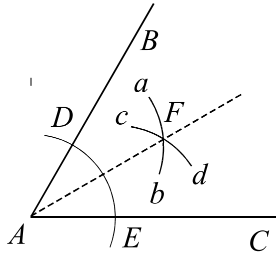


Рис. 9

(10) Построить касательную к окружности, проходящую через точку, не принадлежащую ей.

Решение. □ На отрезке OM как на диаметре строим окружность, пересекающую данную окружность в точках K и K_1. Прямые MK и MK_1 – искомые касательные, так как они перпендикулярны радиусам OK и OK_1 (углы OKM и OK_1M – прямые, как вписанные и опирающиеся на диаметр) (см. рис. 10). �

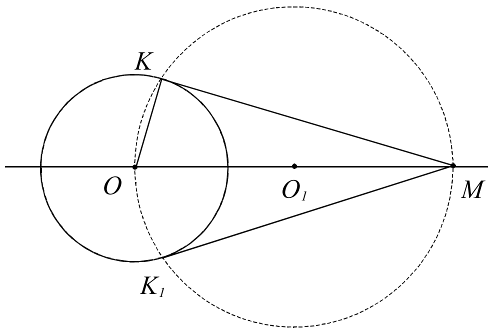


Рис. 10

(11) К двум данным окружностям провести общую внешнюю касательную.

Решение. □ Пусть радиусы данных окружностей равны R и r ($R > r$). Из центра большего круга O_1 (см. рис. 11) проводим окружность радиусом $R - r$. К ней из центра O_2 меньшего круга строим касательную O_2K. Из центра O_1

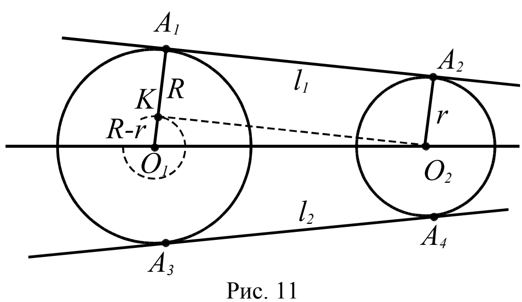


Рис. 11

через точку касания K проводим радиус большой окружности O_1A_1. Из точки A_1 проводим прямую перпендикулярную O_1A_1 до пересечения в точке A_2 с меньшей окружностью. Точки A_1 и A_2 соединяем. Прямая A_1A_2 – искомая касательная. Задача допускает два решения (A_1A_2 и A_3A_4), если меньший круг не лежит целиком внутри большего

В случае внутреннего касания окружностей задача имеет одно решение. Для этого через точку касания M строим прямую, перпендикулярную радиусу, проведенному в точку касания окружностей.

В случае, когда радиусы данных окружностей равны между собой, задача имеет два решения. Через центры O_1 и O_2 проводим прямые, перпендикулярные линии центров O_1O_2. Через точки пересечения этих прямых с окружностями, расположенными по одну сторону от прямой O_1O_2, проводим прямые, которые и дают искомые решения. Построение проведите самостоятельно. �

(12) К двум данным окружностям провести общую внутреннюю касательную.

Решение. □ В случае внешнего касания заданных окружностей задача имеет лишь одно решение. Решением является прямая, перпендикулярная линии центров O_1O_2.

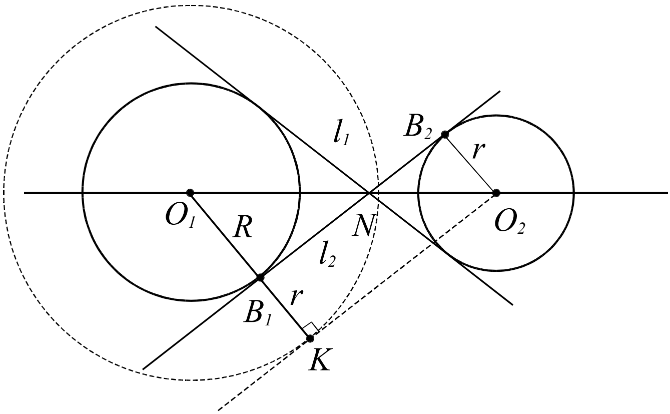


Рис. 12

Если окружности не имеют общих точек и не лежат одна внутри другой, то задача имеет два решения.

Из центра O_1 (см. рис. 12) большей окружности проведем окружность радиусом $R + r$. Из центра O_2 меньшей окружности проведем касательные к построенной вспомогательной окружности. Точку касания K и центр O_1 соединим прямой KO_1, которая пересечет большую окружность в точке B_1. Из точки B_1 проведем прямую, перпендикулярную радиусу B_1O_1 до пересечения в точке B_2 с меньшей окружностью. Точки B_1 и B_2 соединяем. Прямая B_1B_2 – искомая касательная.

Аналогично строится и вторая внутренняя касательная. Точка N пересечения внутренних касательных всегда лежит на линии центров окружностей.

В случае, когда одна из окружностей лежит полностью внутри другой или пересекает ее в двух точках, задача решения не имеет.

Случай $R = r$ рассмотрите самостоятельно. �

Примечание. Не все задачи на построение циркулем и линейкой разрешимы. К числу неразрешимых задач, в частности, относятся три классические задачи на построение, а именно:

трисекция угла: разделить с помощью циркуля и линейки произвольный угол на 3 равные части (невозможно разделить уже угол в $60°$);

удвоение куба: дан отрезок, равный ребру некоторого куба, и требуется построить отрезок, равный ребру другого куба, имеющего вдвое больший объем;

квадратура круга: построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

§ 3. Методы решения задач на построение

А. Метод геометрических мест

Предположим, что задача сводится к построению точки, удовлетворяющей определенным условиям. Если одно из условий определяет множество U_1 (геометрическое место) точек, а другое условие – множество U_2, то искомую точку можно получить, пересекая множества U_1 и U_2. Поэтому рассматриваемый метод называют также ***методом пересечения множеств***.

Задача 1. Построить треугольник по стороне, высоте, опущенной на эту сторону, и медиане к другой стороне.

Решение. □ *Анализ.* Даны a, h_a и m_b. Если K – основание медианы, то K удовлетворяет условиям: (1) находится на расстоянии m_b от B; (2) находится на расстоянии $h_a/2$ от прямой BC.

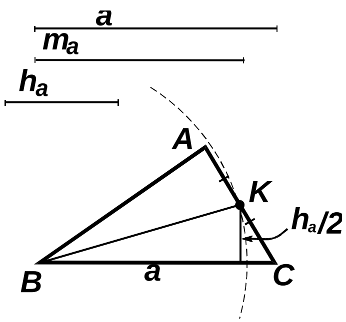


Рис. 13

Условие (1) определяет множество точек U_1 – окружность радиуса m_b с центром в точке B. Условие (2) определяет множество точек U_2 – прямую, параллельную BC и расположенную на расстоянии $h_a/2$ от нее.

Построение. Строим отрезок BC длиной a, затем множества точек U_1 и U_2. Их пересечение – точки K_1 и K_2. По точке K_i ($i \in \{1;2\}$), продлевая отрезок CK_i на величину, равную CK_i, получаем точки A_1 и A_2 (см. рис. 14).

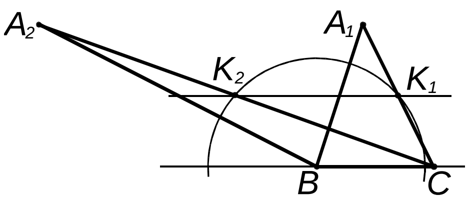


Рис. 14

Доказательство того, что треугольники A_1BC и A_2BC удовлетворяют условиям задачи, и других треугольников нет, очевидным образом следует из предыдущих рассмотрений.

Исследование. Из построения видно, что при $m_b < \dfrac{h_a}{2}$ задача решений не имеет, при $m_b = \dfrac{h_a}{2}$ – единственное решение, а при $m_b > \dfrac{h_a}{2}$ – два решения. �

Б. Методы геометрических преобразований

Эти методы основаны на применении гомотетий, движений.

Метод подобия базируется на применении гомотетии.

Задача 2. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две вершины квадрата лежали на основании треугольника, а две другие – на боковых сторонах.

Решение. □ Возьмем любую точку M' на стороне AB и построим квадрат $M'N'P'Q'$, где $M'N' \parallel AC$. Искомый квадрат $MNPQ$ можно получить из квадрата $M'N'P'Q'$ с помощью гомотетии с центром B. Пересекая прямые BQ' и AC, получим вершину Q искомого квадрата, по которой легко строится весь квадрат (см. рис. 15). �

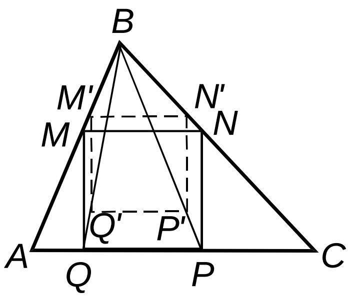


Рис. 15

Во многих задачах на построение удается разделить условие задачи на две такие части, что одна из них вполне определяет форму фигуры, которую требуется построить, а другая часть определяет размер этой фигуры. Сущность метода подобия заключается в том, что, используя те элементы условия задачи, которые определяют форму искомой фигуры, можно сначала построить фигуру, подобную искомой. Затем, используя элементы, определяющие размер, при помощи подобного преобразования выполняется построение искомой фигуры.

Этот метод удобен, когда только одна из данных в задаче величин длина, а остальные величины – углы или отношения каких-либо линейных элементов.

Задача 3. В данный угол ABC вписать окружность, которая проходила бы через данную внутри этого угла точку M .

Решение. □ Проведем биссектрису BL угла ABC и прямую BM . Центр искомой окружности должен лежать на BL , но его положение на BL нам неизвестно. Построим вспомогательную окружность, вписанную в $\angle ABC$. Ее центр O также должен лежать на BL (см. рис. 16).

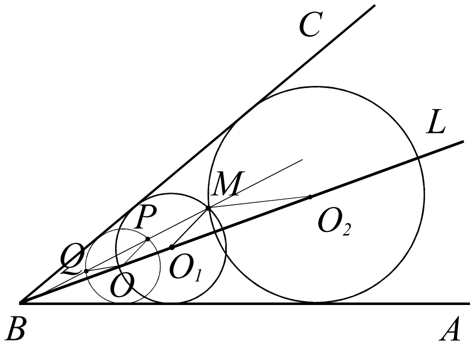


Рис. 16

Окружности с центром в точке O пересекает прямую BM в двух точках P и Q . Соединим точки P и Q с центром O и проведем через точку M прямые $MO_1 \parallel PO$ и $MO_2 \parallel QO$. Точки O_1 и O_2 будут центрами двух окружностей, которые можно вписать в $\angle ABC$ так, чтобы они проходили через точку M . Таким образом, задача имеет два решения. Центром подобия является точка B . �

Задача 4. Вписать в данный сегмент квадрат так, чтобы его сторона лежала на хорде, а две вершины на дуге сегмента.

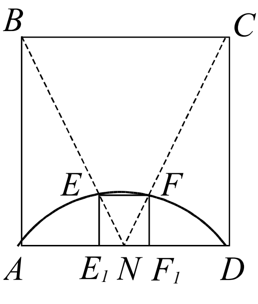


Рис. 17

Решение. □ Выполним построение следующим образом. В концах хорды AD восставим перпендикуляры $AB \perp AD$, $CD \perp AD$, $AD = CD = AB$ (см. рис. 17). Выполним подобное преобразование квадрата $ABCD$, взяв в качестве центра подобия середину N хорды AD . На пересечении отрезков BN и CN с дугой данного сегмента получим точки E и F соответственно. Опустив из этих точек перпендикуляры на AD , получаем точки E_1 и F_1 . Квадрат EE_1F_1F – искомый. �

Рассмотрим задачу на применение ***метода параллельного переноса.***

Задача 5. Построить трапецию по ее основаниям *a*, *b* и диагоналям d_1 и d_2.

Решение. □ В трапеции $ABCD$ (см. рис. 18) диагонали для построения непосредственно использовать не удается. Однако, совершив параллельный перенос диагонали $BD = d_2$ такой, что точка B перейдет в точку C, замечаем, что треугольник ACM может быть построен по трем сторонам $a+b, d_1$ и d_2. Получив точку C, проведем через нее прямую параллельную AD и на ней найдем точку B пересечения дуги окружности радиуса d_2 с центром в точке D. Далее выполним обратный параллельный перенос диагонали d_2. Точки A, B, C и D задают четырехугольник $ABCD$, являющийся искомой трапецией. �

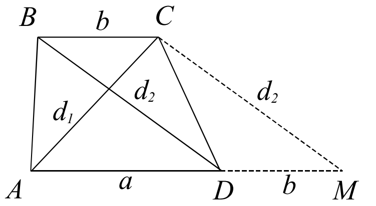


Рис. 18

Рассмотрим задачу на применение ***метода поворота.***

Задача 6. Даны три параллельные прямые и точка A на одной из них. Построить на других прямых точки B и C так, чтобы треугольник ABC оказался правильным.

Решение. □ Если выполнить поворот плоскости на угол $60°$ вокруг точки A, то точка C перейдет в точку B. Пусть c' – прямая, полученная из c поворотом на $60°$ вокруг точки A. Ясно, что B – точка пересечения прямых b и c'. Следовательно, мы можем построить точку B, а значит, и ΔABC (см. рис. 19). �

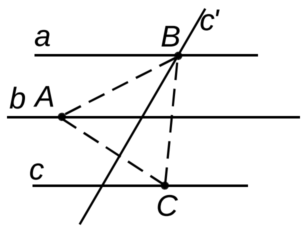


Рис. 19

Метод симметрии в задачах на построение основан на свойствах осевой и центральной симметрии фигур или их частей и заключается в том, что для данной фигуры (или ее части) выполняется симметричное относительно некоторой оси или точки построение. Это иногда позволяет заметить такие зависимости между элементами фигур (или их частей) данной и симметричной, которые до построения заметить было трудно. Успех зависит от удачного выбора осей и центров симметрии.

Задача 7. Дана прямая a и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на прямой a точку N такую, чтобы сумма $AN + BN$ была наименьшей.

Решение. □ Построим точку B_1, симметричную точке B относительно прямой a. Пусть N – искомая (см. рис. 20). Тогда $BN = B_1N$ и $AN + NB = AN + NB_1$. Сумма $AN + NB_1$ будет наименьшей, если отрезки AN и NB_1 лежат на прямой. Поэтому, построив точку B_1 и соединив ее с точкой A, получим N как точку пересечения прямых a и AB_1. ◆

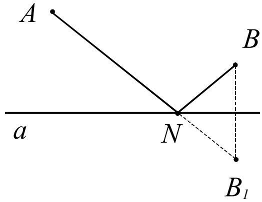


Рис. 20

Задача 8. Даны две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и не пересекающая их прямая a. Найти на прямой a такую точку N, чтобы касательные из нее к данным окружностям образовывали с прямой a равные углы (см. рис.21).

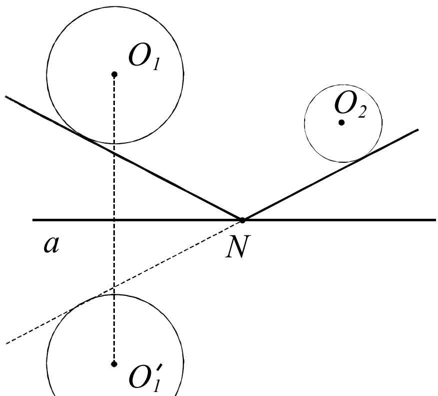


Рис. 21

Решение. □ Строим окружность с центром в точке O_1', симметричную относительно прямой a окружности с центром в O_1. Проводим общую касательную к окружностям с центрами в O_1' и O_2. Она пересечет прямую a в искомой точке N. Задача имеет четыре различных решения, поскольку можно построить четыре общие касательные (две внешние и две внутренние) к окружностям с центрами O_1' и O_2. ◆

В. Метод вычислений, или алгебраический метод

Применение ***алгебраического метода*** к решению геометрических задач на построение сводится к следующему алгоритму:

1) составлению уравнения по условиям задачи;

2) решению полученного уравнения относительно буквы, означающей искомый отрезок;

3) исследованию полученной формулы;

4) построению отрезка по составленной формуле.

Пусть решение задачи сводится к построению какого-либо отрезка. Можно обозначить этот отрезок за x и решить вначале задачу на вычисление, т.е. выразить x через известные отрезки: $x = f(a, b, c, \ldots)$. Далее остается построить отрезок x по этой формуле.

Алгебраический метод является универсальным, он применим к любой задаче на построение (но не всегда дает наиболее простое решение). Кроме того, средствами алгебры можно доказать, что та или иная задача не может быть решена с помощью циркуля и линейки.

Построение отрезков по заданным формулам

Построение отрезков по заданным формулам. Пусть через a, b, c, d, ... обозначены заданные отрезки, а через $x, y, z, t, \ldots -$ искомые.

А. Построение отрезков по формулам, представляющим собой сумму, разность ($x = a \pm b$), а также умножение либо деление на число ($x = ka$ или $x = \dfrac{a}{k}$), сводится к сложению или вычитанию отрезков, увеличению отрезка в заданное число раз и делению отрезка на заданное число равных частей.

Б. Построение отрезков по формулам $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ сводится к построению прямоугольного треугольника по его катетам, либо гипотенузе и катету. В первом случае $x -$ гипотенуза, во втором – катет.

В. Построение отрезков по формулам $x = \dfrac{ab}{c}$ или $x = \dfrac{a^2}{c}$ сводится к нахождению четвертого пропорционального отрезка. Для этого используется теорема о пересечении сторон угла параллельными прямыми (см. рис. 23 этой главы).

Г. Построение отрезков по формулам $x = \dfrac{a^2}{c}$ или $x = \sqrt{ab}$ удобно выполнять, используя теорему о перпендикуляре, опущенном из произвольной точки окружности на диаметр.

На рисунках 22 и 23 показано, как строить отрезок, выраженный последними двумя формулами.

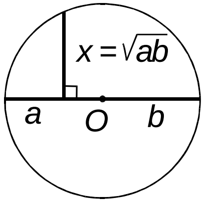


Рис. 22

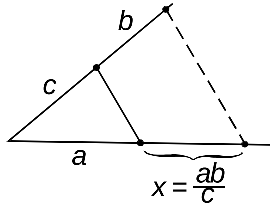


Рис. 23

Д. Построение отрезков по формулам, представляющим комбинации приведенных выше формул, выполняется путем введения вспомогательных неизвестных отрезков и последовательного их отыскания.

В частности, для формул имеющих сложный вид, их можно представить в виде суперпозиции перечисленных выше формул. Например,

$$x = \sqrt{ab + cd} = \sqrt{(\sqrt{ab})^2 + (\sqrt{cd}\,)^2} = \sqrt{u^2 + v^2}\ ,$$

где $u = \sqrt{ab}$, $v = \sqrt{cd}$;

$$y = \frac{abc}{d^2 + e^2} = \frac{ab}{\sqrt{d^2 + e^2}} \cdot \frac{c}{\sqrt{d^2 + e^2}} = \frac{pc}{q},$$

где $q = \sqrt{d^2 + e^2}$, $\quad p = \dfrac{ab}{q}$.

Замечание. По формулам $x = a^2$, $\quad x = \dfrac{1}{a}$, $\quad x = \sqrt{a}$ построить отрезок x невозможно, если не задан единичный отрезок.

Если единичный отрезок задан, то построение осуществляется просто:

$$a^2 = \frac{a \cdot a}{1},\ \frac{1}{a} = \frac{1 \cdot 1}{a},\ \sqrt{a} = \sqrt{a \cdot 1}\ .$$

Примеры.

1. Построить отрезок, выраженный формулой $x = \dfrac{(a+b)(b-c)}{a+c}$.

Решение. □ Для построения x последовательно строим четыре отрезка:

$$y = a+b, \quad z = b-c, \quad t = a+c, \quad x = \frac{yz}{t}. ◆$$

2. Построить отрезок, выраженный формулой

$$x = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a+c}.$$

Решение. □ Преобразовав заданную формулу к виду

$$x = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a+c} = \frac{(a+b)^2}{a+c},$$

строим отрезки $y = a+b,\ z = a+c$. Тогда $x = \dfrac{y^2}{z}$. ◆

Замечание. Без преобразования после почленного деления в исходной формуле пришлось бы выполнить пять операций.

3. Построить отрезок, выраженный формулой $x = \dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{cd}$.

Решение. □ Положим $y = \dfrac{ab}{c}, \quad z = \sqrt{a^2+b^2}$. Тогда $x = \dfrac{yz}{d}$. ◆

4. Построить отрезок, выраженный формулой

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}.$$

Решение. Строим вспомогательные отрезки

$$y = \sqrt{a^2+b^2} \text{ и } z = \sqrt{c^2-d^2}.$$

Тогда $x = \sqrt{y^2+z^2}$. ◆

Замечание. В этом примере, как и во многих других, вводя новые отрезки, можно подбирать разные комбинации заданных. Наилучшим решением будет такое, которое требует минимального количества операций.

5. Построить отрезок, выраженный формулой $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

Решение. □ Выполним преобразования

$$x = \sqrt[4]{a^4 + b^4} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4}} = \sqrt{\sqrt{a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)}} = \sqrt{a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}}.$$

Обозначим $y = \frac{b^2}{a}$, $z = \sqrt{a^2 + y^2}$, тогда $x = \sqrt{az}$. �

6. В данный треугольник ABC вписать квадрат $MQPN$ так, чтобы две его вершины Q и P лежали на основании BC , а две другие – на боковых сторонах.

Решение. □ Эта задача уже была решена методом подобия (задача №2 настоящей главы).

Строим высоту AD треугольника ABC. Обозначим $BC = a$, $AD = h$, $MN = MQ = x$ (см. рис. 24).

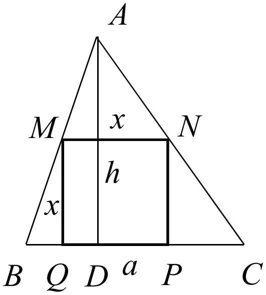


Рис. 24

Так как треугольник ABC задан, то отрезки $BC = a$ и $AD = h$ известны. Выразим длину отрезка x по формуле через длины отрезков a и h.

Из подобия треугольников ABC и AMN (в них по условию $MN \parallel BC$) находим $\frac{a}{x} = \frac{h}{h - x}$, откуда

$$x = \frac{ah}{a + h}.$$

Построив по выведенной формуле сторону x квадрата $MQPN$, проводим на расстоянии x от основания BC прямую $MN \parallel BC$. Получив точки M и N , опустим $MQ \perp BC$ и $NP \perp BC$.

Искомый квадрат $MNPQ$ построен (см. рис. 24). �

Глава 3. Треугольник

§ 1. Основные определения

Треугольником называется фигура, образованная замкнутой ломаной, состоящей из трех звеньев, т.е. треугольник – это n-угольник при $n = 3$.

Для краткости слово треугольник обозначается символом Δ. Вершины треугольника обычно обозначают большими буквами латинского алфавита, а противоположные им стороны теми же малыми буквами. Например, вершины A, B и C, а противоположные им стороны a, b, c.

Если все три угла треугольника острые, то он называется ***остроугольным,*** а если один из его углов тупой, то – ***тупоугольным***. Треугольник, имеющий прямой угол, называется ***прямоугольным***.

Теорема. (Определение вида треугольника по его сторонам).

Пусть a, b и c – стороны треугольника, причем c – наибольшая сторона; тогда:

а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;

б) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный;

в) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.

Углы треугольника не могут быть заданы произвольно, поскольку имеет место теорема.

Теорема. ***Во всяком треугольнике сумма углов равна*** $180°$ ***или*** π ***радиан.***

Следствия из теоремы. 1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то и третьи углы равны.

2. У любого треугольника хотя бы два угла острые.

При любых данных положительных углах α, β, γ, составляющих в сумме два прямых, существуют треугольники, имеющие α, β, γ своими внутренними углами.

Треугольник называется ***равнобедренным,*** если две его стороны имеют одинаковую длину, и ***равносторонним,*** если все его стороны по длине равны.

Равные стороны равнобедренного треугольника обычно называют ***боковыми*** сторонами, а третью его сторону – ***основанием. Вершиной равнобедренного треугольника*** называют вершину, заключенную между равными сторонами.

Две стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называются ***катетами***, а третья сторона (лежащая против прямого угла) – ***гипотенузой***.

Равносторонний треугольник является ***равноугольным*** (и наоборот).

Периметр треугольника – сумма длин его сторон: $P = a + b + c$.

Примечание: иногда периметром треугольника называют множество точек, лежащих на его сторонах.

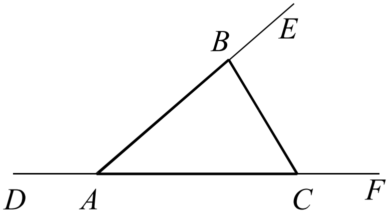


Рис. 1

Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника (или многоугольника), называется ***внешним*** углом этого треугольника (или многоугольника). Например, углы DAB, CBE, BCF (см. рис. 1). Углы самого треугольника называются ***внутренними***.

Теорема. ***Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.***

Следствие. Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла его, не смежного с ним.

Соотношения между сторонами и углами треугольника

Теоремы. ***Во всяком треугольнике:***

1) ***против равных сторон лежат равные углы;***

2) ***против большей стороны лежит больший угол.***

Обратные теоремы. ***Во всяком треугольнике:***

1) ***против равных углов лежат равные стороны;***

2) ***против большего угла лежит большая сторона.***

Теорема (неравенство треугольника). ***Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны***.

Если a, b, c – положительные числа, то треугольник со сторонами a, b, c существует в том и только том случае, если выполняются соотношения $a + b > c, b + c > a, a + c > b$. Эта система равносильна одному неравенству $\frac{|a-b|}{2} < c < \frac{a+b}{2}$.

Теорема. ***Если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон.***

§ 2. Равенство треугольников

Два треугольника называются ***равными***, если они могут быть совмещены так, чтобы все их части совпадали.

Признаки равенства треугольников

Теоремы. 1. (Первый признак равенства треугольников – *по двум сторонам и углу между ними*): ***если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.***

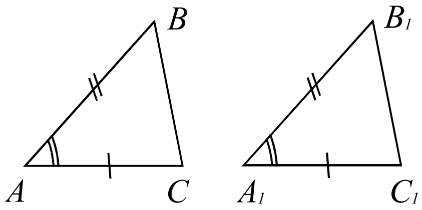


Рис. 2

Так $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (см. рис. 2), поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$

2. (Второй признак равенства треугольников – *по стороне и двум к ней прилежащим углам*): ***если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны***.

Так $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, поскольку $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $AC = A_1C_1$ (см. рис. 3).

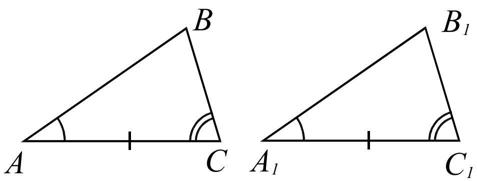


Рис. 3

3. (Третий признак равенства треугольников – *по трем сторонам*): ***если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

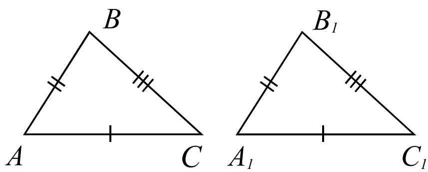


Рис. 4

Так $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, поскольку $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$ (см. рис. 4).

Задача 1. Построить треугольник, если даны его периметр $P = a + b + c$ и два угла A и B.

Решение. □ Предположим, что $\triangle ABC$ построен (см. рис. 5). Продолжив в обе стороны отрезок AB, отложим на прямой AB отрез-

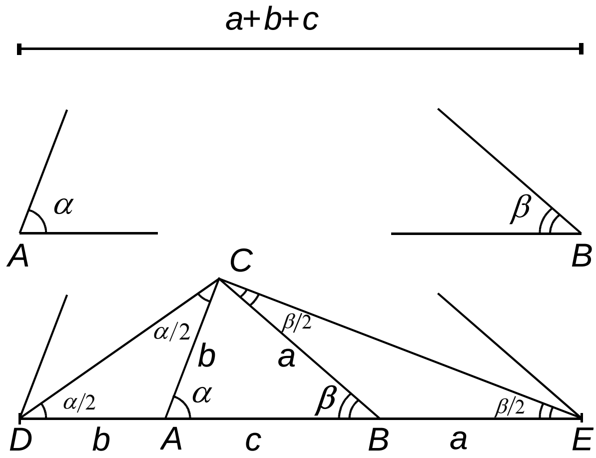


Рис. 5

ки $AD = b$ и $BE = a$ и соединим вершину C с точками D и E. Тогда $DE = a + b + c$. Треугольники DCA и CBE – равнобедренные, так как $DA = AC, CB = BE$. Соответственно, по теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle CDA = \angle DCA = \frac{\angle CAB}{2} = \frac{\alpha}{2},\ \angle BCE = \angle CEB = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Следовательно, треугольник DCE однозначно задается условиями задачи и его легко построить по заданному основанию и двум прилежащим углам, равным половинам данных углов. Этим определяется вершина C. Далее через точку C следует провести прямые AC и BC так, чтобы они составляли с прямой DE заданные углы.

Построение. Для решения задачи на прямой откладываем отрезок $DE = P$, из точек D и E проводим лучи, под углами α, β и $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$.

Последние два пересекаются в точке C. Далее через точку C проводим параллельно первым двум лучам прямые до пересечения с прямой DE в точках A и B. Треугольник ABC – искомый. ■

§ 3. Подобие треугольников

Два треугольника называются ***подобными***, если их соответственные углы равны и стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого.

Признаки подобия треугольников

1. (Первый признак подобия треугольников – *по двум углам*): ***если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны:***

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 .$$

2. (Второй признак подобия треугольников – *по двум сторонам и углу между ними*): ***если в двух треугольниках две пары сторон пропорциональны, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны:***

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1},\ \angle C = \angle C_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 .$$

3. (Третий признак подобия треугольников – *по трем сторонам*): ***если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то треугольники подобны:***

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 .$$

Следствие (первого признака подобия треугольников). Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая другую сторону, отсекает от него треугольник подобный данному.

Задача 2. В треугольнике ABC стороны $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$. Через внутреннюю точку треугольника O проведены прямые, параллельные его сторонам. Найти длины отрезков, высекаемых этими прямыми на сторонах треугольника, если известно, что $MO : PS : ON = 2:1:3$ (см. рис. 6).

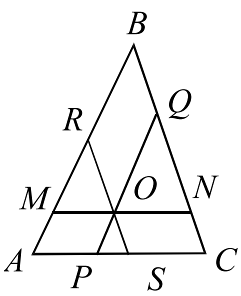


Рис. 6

Решение. □ Четырехугольники $AMOP$, $RBQO$ и $SONC$ – параллелограммы (у них противоположные стороны параллельны). Следовательно, $MO = AP$ и $NO = SC$. Тогда $AC = 6PS$ и $PS = \frac{b}{6}$.

По первому признака подобия треугольники OPS, MRO, OQN подобны друг другу и каждый из них подобен ΔABC. Так, $\triangle ABC \sim \triangle OPS$ с коэффициентом подобия 6, $\triangle OPS \sim \triangle MRO$ с коэффициентом подобия 2. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle MRO$ с коэффициентом подобия 3 и $MR = \frac{AB}{3} = \frac{c}{3}$. Аналогично получаем, что $QN = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$. �

Обобщенная теорема подобия. ***Если два треугольника подобны, то любой линейный элемент (или сумма линейных элементов) одного треугольника относится к соответствующему линейному элементу (или сумме соответствующих линейных элементов) другого треугольника как соответственные стороны.***

В частности, радиусы описанной или вписанной окружностей, периметры, соответственные высоты, медианы, биссектрисы двух подобных треугольников относятся как соответственные стороны.

§ 4. Замечательные точки и линии в треугольнике

Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины двух сторон.

Теорема. ***Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна половине этой стороны.***

Следствие. Средняя линия отсекает от треугольника треугольник подобный исходному.

Медиана треугольника

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок прямой, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны треугольника.

Свойства медианы:

а) Медиана есть геометрическое место точек, являюшихся серединами отрезков прямых, заключенных внутри треугольника и параллельных той его стороне, к которой проведена медиана (см. рис. 7): $AD = DB$, $A_1D_1 = D_1B_1$, $A_2D_2 = D_2B_2$, $A_3D_3 = D_3B_3$, $A_4D_4 = D_4B_4$.

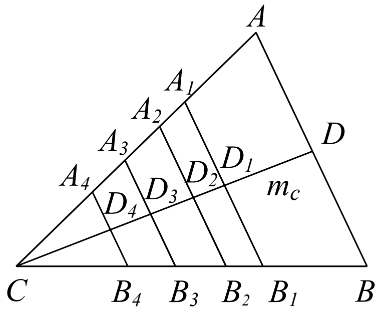


Рис. 7

б) **Теорема о медианах.** ***Во всяком треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.***

Точка пересечения медиан называется ***центром тяжести*** треугольника.

в) ***Формула длины медианы.*** Длины медиан треугольника вычисляются через длины его сторон по формулам:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}\,,\; m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2};$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}\,.$$

Доказательство. □ Достроим треугольник ABC до параллелограмма, проведя $BG \parallel AC$ и $CG \parallel AB$ (см. рис. 8). Середина D стороны BC треугольника ABC является точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABGC$. Следовательно, длина диагонали AG равна $2m_a$. Используя теорему о том, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равняется сумме квадратов всех его сторон, получаем равенство

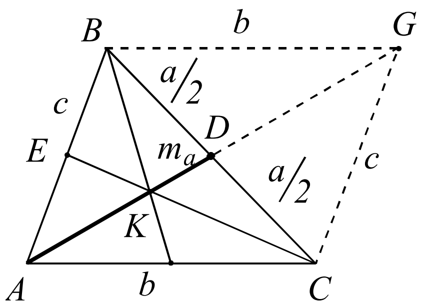


Рис. 8

$$4m_a^{\ 2} + a^2 = 2b^2 + 2c^2 .$$

Отсюда следует

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} . \ ◆$$

Аналогично доказываются две другие формулы.

Справедливы соотношения:

а) $\dfrac{|b-c|}{2} < m_a < \dfrac{b+c}{2}$; $\dfrac{|a-c|}{2} < m_b < \dfrac{a+c}{2}$;

$\dfrac{|a-b|}{2} < m_c < \dfrac{a+b}{2}$;

б) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Экстремальное свойство точки пересечения медиан. Точка пересечения K медиан треугольника ABC является точкой, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника ($KA^2 + KB^2 + KC^2$) принимает наименьшее значение.

Задача 1. Построить треугольник по трем медианам m_a, m_b, m_c.

Решение. □ Построим вспомогательный треугольник AED по трем сторонам $AE = \dfrac{2}{3}m_c$, $AD = \dfrac{2}{3}m_a$, $DE = \dfrac{2}{3}m_b$ (см. рис. 9). В треугольнике AED проведем медиану AP и продолжим ее за точку P на отрезок $PC = AP$. Точку C соединим с точкой D и, продолжив отрезок CD, отложим на нем $CM = m_c$. От точки A на продолжении отрезка AD отложим $AN = m_a$. Через точки A и M, N и C проведем прямые до их пересечения в точке B.

Треугольник ABC – искомый. �

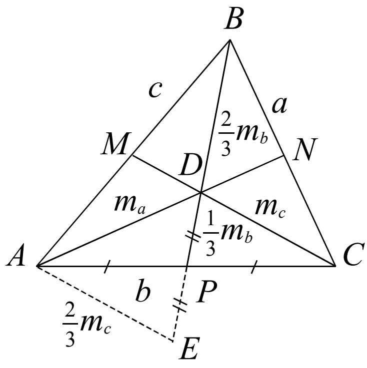


Рис. 9

Высота треугольника

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение.

Теорема. ***Три высоты треугольника пересекаются в одной точке*** (называемой ***ортоцентром*** треугольника).

Формула длины высоты. Высоты треугольника, опущенные на стороны a, b, c, обозначаются соответственно h_a, h_b, h_c и вычисляются по формулам:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

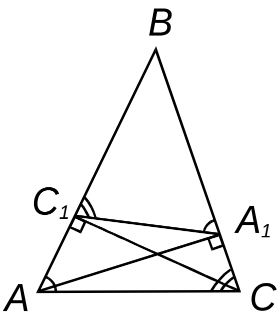


Рис. 10

При решении задач иногда бывает полезно использовать следующие факты.

Если AA_1 и CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC (см. рис. 10), то:

1. $\triangle ABA_1 \sim \triangle CBC_1$; 2. $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle BAC$;

3. $\angle BAC = \angle BA_1C_1$ и $\angle BCA = \angle BC_1A_1$.

Задача 2. В треугольнике ABC угол B равен β, AA_1 и CC_1 – высоты. Доказать, что треугольник BA_1C_1 подобен треугольнику ABC. Найти коэффициент подобия треугольников.

Решение. □ Треугольник ABA_1 – прямоугольный и $\dfrac{BA_1}{AB} = \cos\beta$ (см. рис. 10). Аналогично для прямоугольного $\triangle C_1BC$ получим $\dfrac{BC_1}{BC} = \cos\beta$. Таким образом, у треугольников BA_1C_1 и ABC угол B – общий и отношение сторон, содержащих общий угол, равно $\dfrac{BA_1}{AB} = \dfrac{BC_1}{BC} = \cos\beta$. Значит треугольники подобны и коэффициент подобия равен $\cos\beta$. ♦

Треугольник $A_1B_1C_1$, вершины которого совпадают с основаниями высот треугольника ABC, называется ***треугольником Шварца.***

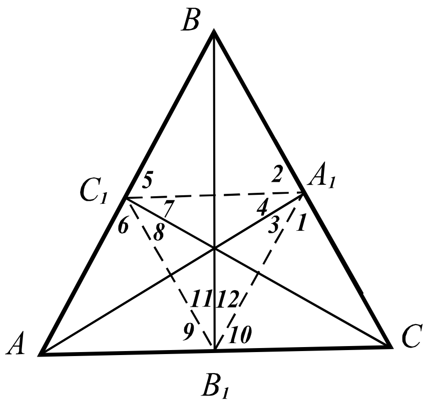


Рис. 11

Если ABC – остроугольный треугольник (см. рис. 11), то:
$\angle 1 = \angle 2 = \angle A$, $\angle 5 = \angle 6 = \angle C$, $\angle 9 = \angle 10 = \angle B$,
$\angle 3 = \angle 4 = 90° - \angle A$, $\angle 7 = \angle 8 = 90° - \angle C$, $\angle 11 = \angle 12 = 90° - \angle B$.

Экстремальное свойство треугольника Шварца: если ABC – остроугольный треугольник, то $A_1B_1C_1$ – треугольник с наименьшим периметром из треугольников, вписанных в треугольник ABC.

Задача 3. Найти периметр треугольника, вершины которого находятся в основаниях высот остроугольного треугольника со сторонами a, b и c.

Решение. □ Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (см. рис. 12).

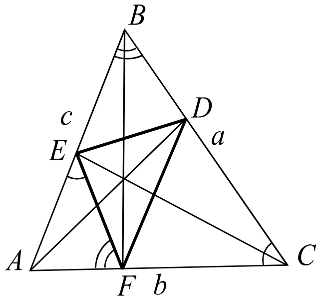


Рис. 12

Треугольники ABC и AFE подобны. Тогда $\dfrac{FE}{BC} = \dfrac{AF}{AB}$ и, следовательно,

$AF = \dfrac{c}{a} \cdot FE = c \cdot \cos \angle A$ и $FE = \dfrac{a}{c} \cdot AF$.

Из теоремы косинусов для угла A треугольника ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A = b^2 + c^2 - 2bAF.$$

Отсюда $AF = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$ и $FE = \dfrac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$.

Аналогично находим

$$ED = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac} \text{ и } FD = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}.$$

Периметр треугольника EDF равен $FE + FD + DE$.

После преобразований получим:

$$FE + FD + DE = 8p \cdot \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}. \ �$$

Задача 4. Построить остроугольный треугольник, если даны три точки A_1, B_1, C_1, являющиеся основаниями его высот.

Решение. □ Воспользуемся свойствами треугольника Шварца. Соединив отрезками точки A_1, B_1, C_1, получим треугольник A_1, B_1, C_1. Проведем биссектрисы углов этого треугольника и через вершины A_1, B_1, C_1 прямые перпендикулярные к ним (см. рис. 11). Точки пересечения этих прямых дают вершины искомого треугольника. Проведите построения самостоятельно. �

Биссектриса треугольника

Биссектриса внутреннего угла треугольника – отрезок прямой, делящей данный угол на две равные части, соединяющий вершину угла с точкой на противоположной стороне. Биссектрисы углов A, B, C, лежащих против сторон a, b, c, обозначаются соответственно l_a, l_b, l_c.

Свойства биссектрис:

1. Биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

2. Теорема. ***Во всякой треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке***, ***являющейся центром вписанной в треугольник окружности.***

3. Теорема о биссектрисе. ***Биссектриса любого внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.***

Доказательство. □ Пусть AD – биссектриса (см. рис. 13). Площади треугольников ACD и ABD, имеющих общую вершину A, относятся как длины их оснований, т.е.

$$\frac{S_{\vartriangle ACD}}{S_{\vartriangle ABD}} = \frac{CD}{DB}.$$

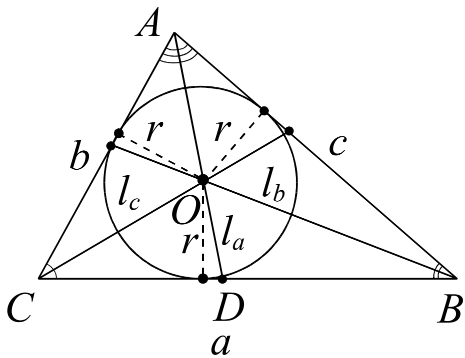


Рис. 13

С другой стороны, эти площади относятся как длины сторон

$$\frac{S_{\vartriangle ACD}}{S_{\vartriangle ABD}} = \frac{0{,}5AC \cdot AD \cdot \sin\angle CAD}{0{,}5AB \cdot AD \sin\angle DAB} = \frac{AC}{AB}.$$

Из сравнения полученных пропорций следует

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}. \ ◆$$

4. ***Формула длины биссектрисы.*** Длина l_a биссектрисы AD (см. рис. 13) угла треугольника ABC, равного α, заключенного между сторонами AC и AB, определяется по формуле

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Доказательство. □ Выразим площадь $\triangle ABC$ двумя различными способами – один раз через стороны AC, AB и угол α, заключенный между ними**,** другой раз как сумму площадей $\triangle ACD$ и $\triangle ABD$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha\,;\; S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}b\cdot l_a\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}c\cdot l_a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Приравнивая эти выражения друг другу, получим $b\cdot c\cdot\sin\alpha = (b+c)\cdot l_a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. Так как $\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, то получаем указанную выше формулу для вычисления длины биссектрисы. �

Примечание. Другую формулу для вычисления биссектрисы дает следующая теорема: ***квадрат биссектрисы треугольника равен разности произведений двух сторон треугольника, между которыми находится биссектриса, и отрезков третьей стороны, на которые рассекает ее биссектриса:*** $l_a^2 = bc - a_b\cdot a_c$

Во всяком треугольнике биссектриса лежит между соответствующими медианой и высотой т.е.

$$h_a \le l_a \le m_a,\qquad h_b \le l_b \le m_b,\qquad h_c \le l_c \le m_c.$$

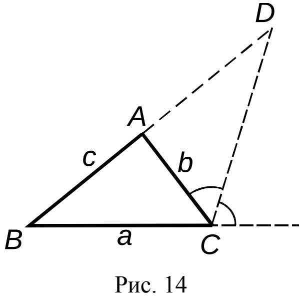


Рис. 14

Биссектриса внешнего угла треугольника выражается формулой:

$$l_c = \frac{2ab}{|a-b|}\sin\frac{\angle C}{2}.$$

Биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в такой точке, расстояния которой до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам $\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}$ (см. рис. 14).

Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

Вневписанной в треугольник ***окружностью*** называется окружность, к которой являются касательными одна из сторон треугольника и продолжения двух его других сторон (см. рис. 15).

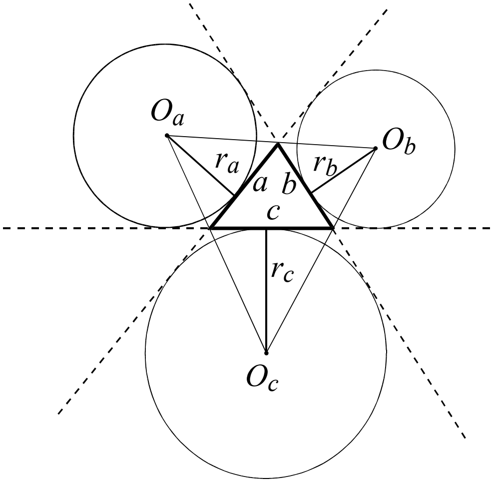


Рис. 15

Радиус вневписанной окружности, касающейся стороны треугольника, имеющей длину a, выражается формулой:

$$r_a = \frac{S}{p-a},$$

где S и $p-$ площадь и полупериметр треугольника.

Продолжения биссектрис внутренних углов треугольника проходят через через центры вневписанных окружностей, являющихся точками, в которых пересекаются биссектрисы внешних углов этого треугольника (см. рис. 15).

Задача 5. Две стороны треугольника равны a и b. Найти его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны b.

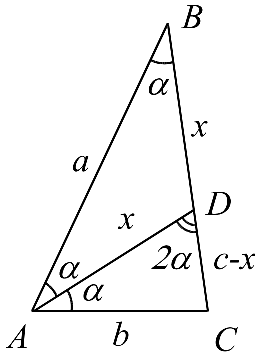


Рис. 16

Решение. □ Пусть в $\triangle ABC$ (см. рис. 16) искомая сторона $BC = c$, AD – биссектриса угла A. Пусть $BD = x$, тогда $AD = c - x$. Так как $\triangle ABD$ равнобедренный ($\angle ABD = \angle DAB$), то и $CD = x$. Из теоремы о биссектрисе внутреннего угла для ΔABC следует $\dfrac{c-x}{x} = \dfrac{b}{a}$ или $x = \dfrac{a}{a+b}c$ (*).

С другой стороны, $\angle CAD = \alpha$, а $\angle ADC = 2\alpha$, как внешний угол

$\triangle ABD$. Тогда, два угла $\triangle ACD$ равны двум углам $\triangle ABC$, и, следовательно, они подобны. Из их подобия следует $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AB}$ или $\frac{b}{c}=\frac{x}{a}$ и тогда $x=\frac{ab}{c}$.

Приравнивая правые части последнего равенства и равенства (*), получаем $c^2=b(a+b)$. Откуда $c=\sqrt{b(a+b)}$. ◆

Задача 6. Построить треугольник по двум сторонам a,b и биссектрисе угла между ними l_c.

Решение. □ Предположим, что $\triangle ABC$ – искомый. Продолжив сторону AC и отложив на ее продолжении отрезок $CD=BC=a$, соединим точки B и D (см. рис. 17). $\triangle BCD$ – равнобедренный, причем $\angle D=\angle B=\angle ECB$, так как по теореме о внешнем угле треугольника $\angle ACB=\angle B+\angle D=2\angle D$. С другой стороны, по условию задачи l_c – биссектриса и, следовательно, $\angle ACB=2\angle ECB=2\angle D$. Углы ECB и CBD – внутренние накрест лежащие, поэтому из их равенства вытекает, что $EC \parallel BD$, а тогда $\triangle AEC$ подобен $\triangle ABD$ и сторона $BD=x$ будет определяться из пропорции $\frac{x}{l_c}=\frac{a+b}{b}$.

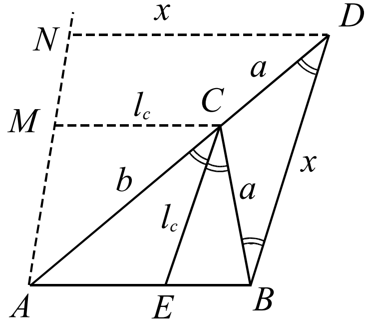


Рис. 17

Теперь построим отрезок x по трем заданным отрезкам $b, a+b, l_c$. Для этого на произвольно выбранной прямой AD последовательно откладываем отрезки $b=AC$ и $a=CD$. Из точки C в произвольном направлении откладываем заданный отрезок $l_c=CM$ и через точку M продолжаем луч AM и проводим $DN \parallel CM$. Отрезок DN равен искомому отрезку x. Далее строим на отрезке CD вспомогательный $\triangle CDB$ по известным трем сторонам $CD=BC=a$ и $DB=x$. Соединив вершину B с точками A и C, получим искомый $\triangle ABC$. ◆

Серединный перпендикуляр

Серединный перпендикуляр – перпендикуляр, восстановленный к стороне треугольника из ее середины.

Все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке O, лежащей внутри треугольника, на одной из его сторон или вне треугольника (см. рис. 18), являющейся центром окружности, описанной вокруг треугольника.

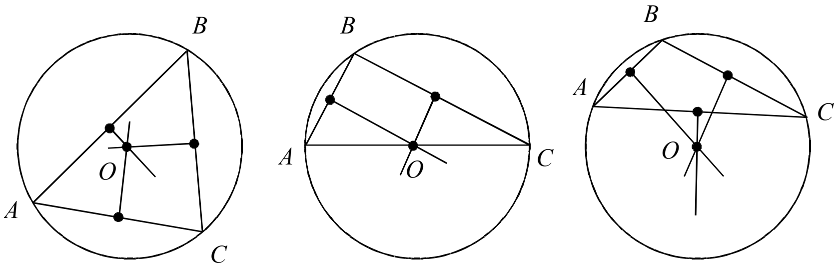


Рис. 18а Рис. 18б Рис. 18в

Равнобедренный треугольник

Теоремы. (1) ***Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.***

Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, является биссектрисой и медианой.

Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

(2) ***Высоты (биссектрисы, медианы) равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.***

(3) ***Если в треугольнике медиана является высотой (или биссектрисой), то этот треугольник равнобедренный.***

(4) ***Если в треугольнике две высоты (медианы) равны, то этот треугольник равнобедренный.***

(5) ***В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.***

Примечание. Верно и обратное утверждение: если два угла треугольника равны, то стороны, лежащие против этих углов, также равны (т.е. треугольник является равнобедренным).

§ 5. Прямоугольный треугольник

Признаки равенства прямоугольных треугольников

Прямоугольные треугольники равны:
(1) по двум катетам;
(2) по гипотенузе и острому углу;
(3) по катету и прилежащему острому углу;
(4) по катету и противолежащему острому углу;
(5) по гипотенузе и катету.

Пусть a и b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза, c_a, c_b – проекции катетов на гипотенузу, h – высота, опущенная на гипотенузу (см. рис. 19). Тогда справедливы следующие соотношения:

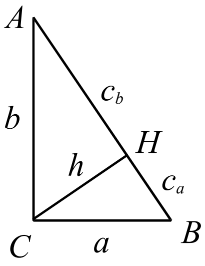


Рис. 19

$h = \sqrt{c_a \cdot c_b}$, *т.е. высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна среднему геометрическому отрезков* c_a *и* c_b, *на которые она разбивает гипотенузу*;

$a = \sqrt{c \cdot c_a}$, $b = \sqrt{c \cdot c_b}$, *т.е. катет прямоугольного треугольника равен среднему геометрическому гипотенузы и проекции этого катета.*

Теорема Пифагора. ***Сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату его гипотенузы***: $a^2 + b^2 = c^2$.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника: $\dfrac{a}{c} = \sin\angle A$; $\dfrac{b}{c} = \cos\angle A$; $\dfrac{a}{b} = \operatorname{tg}\angle A$; $\dfrac{b}{a} = \operatorname{ctg}\angle A$.

Формулы площади прямоугольного треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch = pr,$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр, r – радиус вписанной окружности.

В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, выражается через стороны треугольника формулой:

$$h = \frac{ab}{c}.$$

Признаки подобия прямоугольных треугольников

Признаки подобия прямоугольных треугольников получаются как частные случаи признаков подобия произвольных треугольников, принимая во внимание, что одно условие уже выполнено: прямые углы всегда между собою равны.

Два прямоугольных треугольника подобны, если:

I. Острый угол одного треугольника равен острому углу другого треугольника.

II. Катеты одного треугольника пропорциональны катетам другого треугольника.

III. Гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого треугольника.

Другие свойства прямоугольного треугольника:

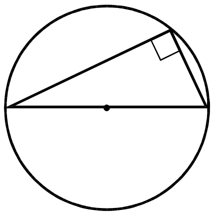


Рис. 20

(1) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы. Радиус описанной окружности равен половине гипотенузы или $c = 2R$ (см. рис. 20).

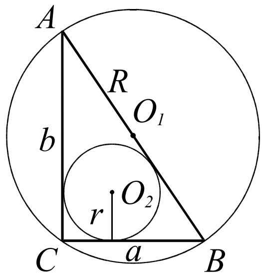


Рис. 21

(2) В прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей $a + b = 2r + 2R$ (см. рис. 21).

Следствием (1) и (2) является формула $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

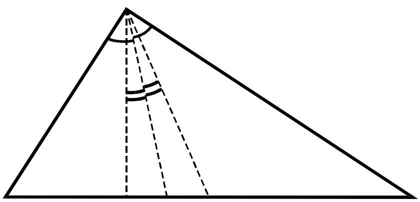


Рис. 22

(3) В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половина. (Верна и обратная теорема: если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.)

(4) Биссектриса прямого угла лежит между медианой и высотой и делит угол между ними пополам (см. рис. 22).

Задача 1. Доказать, что для медиан m_a, m_b, m_c прямоугольного треугольника ($\angle C$ – прямой) выполняется равенство $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$.

Доказательство. □ Пусть стороны треугольника равны a, b, c. Тогда по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. В прямоугольном треугольнике $m_c = \dfrac{c}{2}$. Используя формулу длины медианы, запишем:

$$m_a^2 + m_b^2 = \left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) + \left(\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{a^2+b^2}{4} + c^2 =$$

$$= \frac{c^2}{4} + c^2 = 5\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 5m_c^2 .$$ ◆

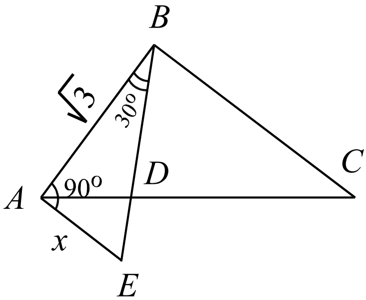


Рис. 23

Задача 2. Прямая, проходящая через вершину прямого угла треугольника, образует с меньшим катетом угол 30° и пересекает гипотенузу в точке, делящей ее в отношении 1:2. Найти длину гипотенузы, если длина меньшего катета равна $\sqrt{3}$.

Решение. □ Пусть прямая BD (см. рис. 23) образует с меньшим катетом AB треугольника ABC угол 30° и точка D лежит на гипотенузе AC. Проведем перпендикуляр AE к катету AB, где E – точка пересечения этого перпендикуляра с прямой BD. Пусть $AE = x$. Тогда AE равен половине гипотенузы BE, как катет, лежащий против угла 30°, и $BE = 2x$. Из теоремы Пифагора для $\triangle ABE$ следует $(2x)^2 = x^2 + 3$, т.е. $x = 1$. Треугольники CDB и ADE подобны, потому что углы одного треугольника соответственно равны углам другого. Поэтому $\dfrac{BC}{AE} = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{2}{1}$ и $BC = 2$. Тогда $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{7}$. ◆

Задача 3. Построить прямоугольный треугольник по сумме его катетов $a+b$ и гипотенузе c.

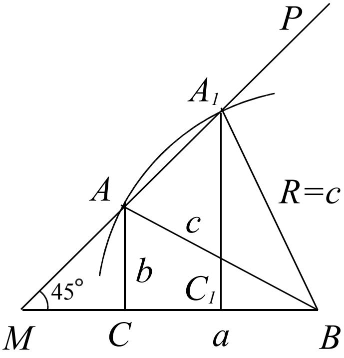


Рис. 24

Решение. □ Из конца M отрезка $BM = a+b$ проводим луч MP под углом $45°$ к отрезку MB (см. рис. 24). Из точки B, как из центра, радиусом $R = c$ проводим дугу до ее пересечения с лучом MP и из полученных точек A и A_1 опускаем перпендикуляры AC и A_1C_1 на прямую MB.

Треугольники ABC и A_1BC_1 – искомые ($BC = A_1C_1$, $AC = BC_1$ и $BC_1 + A_1C_1 = BC + AC$). (Докажите самостоятельно!)

В случае двух точек пересечения дуги с лучом AP задача имеет два решения. В случае касания дуги с лучом AP – одно решение. ◆

Исследуйте, какое дополнительное условие надо наложить на катеты a и b для того, чтобы решение было единственным.

Задача 4. Построить прямоугольный треугольник по его катету a и сумме другого катета с гипотенузой $b+c$.

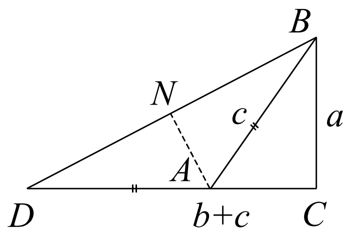


Рис. 25

Решение. □ Строим прямоугольный треугольник BDC по катетам $BC = a$, $DC = b+c$ (см. рис. 25).

Через середину N стороны BD проводим перпендикуляр до пересечения его с прямой DC в точке A. Соединяем точки A и B. Треугольник ABC – искомый ($AD = AB$ как стороны равнобедренного треугольника ABD). ◆

§ 6. Метрические соотношения в треугольнике

Теорема (Фалеса). ***Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне.***

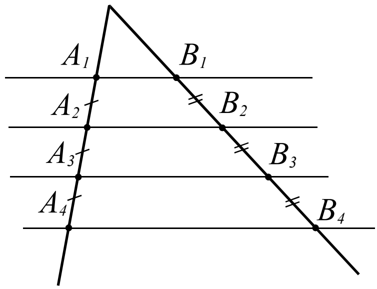


Рис. 26

Следствие. Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекает равные отрезки и на другой прямой.

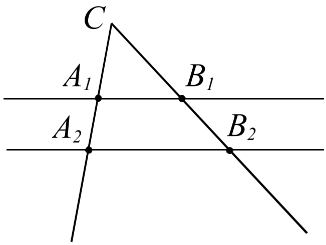


Рис. 27

Теорема (о пропорциональных отрезках). ***Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки*** (т.е. $\dfrac{CA_1}{CA_2} = \dfrac{CB_1}{CB_2}$ или $\dfrac{CA_1}{A_1A_2} = \dfrac{CB_1}{B_1B_2}$).

Задача 1. Через точку D на стороне AB треугольника ABC такую, что $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{m}{n}$, проведена прямая, параллельная стороне AC, пересекающая сторону BC в точке E. Найти отношение $\dfrac{DE}{AC}$.

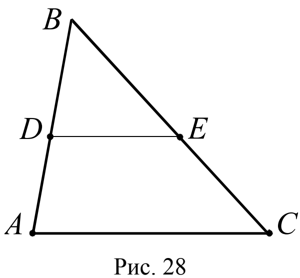


Рис. 28

Решение. □ Так как $AC \parallel DE$ (см. рис. 28), то треугольники DBE и ABC подобны и $\dfrac{DE}{AC} = \dfrac{BD}{AB}$.

Так как $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{m}{n}$, то $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{n}{m+n}$. Значит $\dfrac{DE}{AC} = \dfrac{n}{m+n}$. ■

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена медиана AA_1, пересекающая высоту CD в точке M. Найти отношение $CM : MD$, если $\angle A = \alpha$.

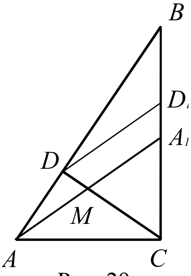


Рис. 29

Решение. □ Через точку D проведем прямую (см. рис. 29), параллельную медиане AA_1, до пересечения с катетом BC в точке D_1. Тогда из теоремы о пропорциональных отрезках:

$$\frac{CM}{MD} = \frac{CA_1}{A_1D_1} = \frac{A_1B}{A_1D_1} = \frac{BD_1 + A_1D_1}{A_1D_1} =$$

$$= \frac{BD_1}{A_1D_1} + 1 = \frac{BD}{DA} + 1 .$$

Из подобия $\triangle DBC$ и $\triangle ABC$ следует, что $BC^2 = AB \cdot BD$, а из подобия $\triangle ADC$ и $\triangle ABC$ следует, что $AC^2 = AB \cdot AD$. Тогда $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{BC^2}{AC^2}$ и $\dfrac{CM}{MD} = \dfrac{BC^2}{AC^2} + 1 = \mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. ■

Теорема косинусов

Теорема. ***Квадрат стороны любого треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без их удвоенного произведения длин этих сторон на косинус угла между ними***

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle CAB .$$

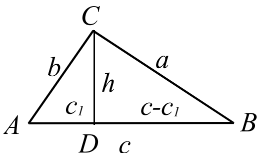


Рис. 30а

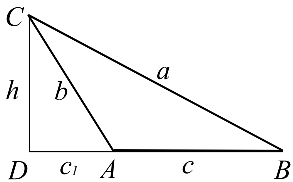


Рис. 30б

Доказательство. □ Рассмотрим три случая.

I. Пусть в треугольнике ABC $\angle CAB -$ острый (см. рис. 30а). Проведем высоту CD и рассмотрим полученные прямоугольные треугольники CDB и ACD. По теореме Пифагора для $\triangle CDB$ $CB^2 = CD^2 + DB^2$ или $a^2 = (c - c_1)^2 + h^2$. В $\triangle ACD$

$CD = h = b\sin\angle A$ и $AD = c_1 = b\cos\angle A$. Тогда, $a^2 = (c - b\cos\angle A)^2 + (b\sin\angle A)^2$ или после упрощений $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$.

II. Пусть $\angle BAC -$ тупой (см. рис. 30б). Из вершины B в треугольнике ABC опустим на продолжение стороны AB высоту CD. Тогда $CB^2 = CD^2 + DB^2$ или $a^2 = (c + c_1)^2 + h^2$, $h = b\sin\angle CAD$ и $c_1 = b\cos\angle CAD$. Учитывая, что $\angle CAD = \pi - \angle CAB$, получим

$$a^2 = (c + b\cos(\pi - \angle CAB))^2 + (b\sin(\pi - \angle CAB))^2$$

или после упрощений

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A.$$

III. Пусть $\angle BAC = 90°$. Тогда $a^2 = c^2 + b^2$ и $\cos\angle CAB = 0$, т.е. верна формула

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A. \blacksquare$$

Теорема синусов

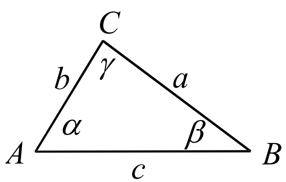


Рис. 31

Теорема. ***Во всяком треугольнике*** (см. рис. 31) ***отношение любой стороны к синусу противоположного ей угла постоянно и равно диаметру описанной около треугольника окружности, т.е.***

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

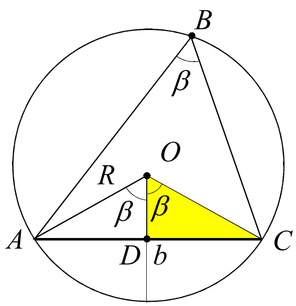


Рис. 32

Доказательство. □ Опишем около треугольника окружность. Поскольку $\angle ABC -$ вписанный, то дуга AC, на которую он опирается, равна 2β (см. рис. 32). Тогда угол AOC равен 2β, а его половина $\angle DOC = \beta$. Из прямоугольного треугольника DOC имеем: $DC = R\sin\beta$, откуда получаем, что

$$\frac{b}{2} = R\sin\beta \text{ или } \frac{b}{\sin\beta} = 2R. \blacksquare$$

Следовательно, если в треугольнике ABC известно основание b и угол при вершине β, то радиус окружности, описанной вокруг треугольника, находится по формуле: $R = \dfrac{b}{2\sin\beta}$.

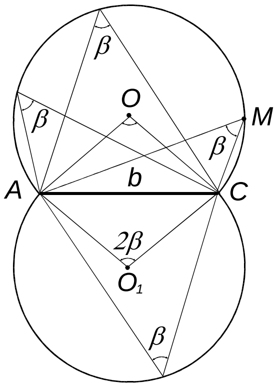


Рис. 33

Следствие из теоремы синусов: геометрическим местом точек M, из которых отрезок AC заданной длины b виден под заданным углом β, состоит из двух дуг окружностей радиуса $R = \dfrac{b}{2\sin\beta}$, опирающихся на рассматриваемый отрезок (см. рис. 33). Для построения центров O и O_1 этих окружностей, достаточно найти вершины равнобедренных треугольников AOC и AO_1C, имеющих своими основаниями отрезок AC и угол при вершине, равный 2β.

Теорема тангенсов

Теорема. ***В любом треугольнике*** $\operatorname{tg}\dfrac{\angle A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$***, где*** $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c) -$ ***его полупериметр***.

Доказательство. □ Из теоремы косинусов вытекает, что

$$1+\cos\angle A = \frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} =$$

$$= \frac{2p\cdot 2(p-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc},$$

$$1-\cos\angle A = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{2\ (p-b)(p-c)}{bc}.$$

Из этих двух выражений вытекает, что

$$\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\angle A}{1+\cos\angle A}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

что и требовалось доказать. �

Основные случаи решения косоугольных треугольников

Рассмотрим четыре основных случая решения косоугольных треугольников.

Задача 3. Даны стороны треугольника a, b и c. Найти углы A, B, C.

Решение. □ Задача имеет единственное решение при условии, что $a + b > c$, где $b \le a \le c$.

Способ 1. Используя теорему косинусов, находим

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \ \cos\angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos\angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \ \blacksquare$$

Способ 2. Углы можно найти также и по теореме тангенсов:

$$\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}; \ \operatorname{tg}\frac{\angle B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Формула для проверки: $A + B + C = 180°$.

Задача 4. Даны две стороны треугольника a и b, и угол C, заключенный между ними. Найти сторону c и углы A и B.

Решение. □ 1. Используя теорему косинусов, находим сторону c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle C}.$$

2. Используя теорему синусов, находим угол B. Пусть $a > b$. Тогда угол B острый и

$$\sin\angle B = \frac{b\sin\angle C}{c}, \ \angle A = 180° - (\angle B + \angle C).$$

Формула для проверки: $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B}$. $\blacksquare$

Задача 5. Даны две стороны a и b треугольника и угол A, лежащий против одной из них. Найти сторону c и углы C и B, если известно, что угол $A-$ наибольший.

Решение. □ 1. Используя теорему синусов, находим угол B, а затем $\angle C$. Так,

$$\sin\angle B = \frac{b\sin\angle A}{a},\ \angle C = 180° - (\angle B + \angle A).$$

2. Используя еще раз теорему синусов, находим c:

$$c = \frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}.$$

Формула для проверки: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A}$. �

Замечание. Треугольники будут равны по двум сторонам и углу не между ними, если известно, что этот угол в каждом из треугольников является наибольшим.

Задача 6. Даны сторона a треугольника и два прилежащих к ней угла C и B. Найти стороны b, c и угол A.

Решение. □ 1. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$.

2. Используя теорему синусов, находим b и c:

$$b = \frac{a\sin\angle B}{\sin\angle A},\ \ c = \frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}.$$

Формула для проверки: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A}$. �

§ 7. Пропорциональные отрезки в треугольнике

Приведем несколько полезных утверждений, не являющихся теоремами, но являющихся опорными задачами, использование которых позволяет решать большое количество задач. Для дальнейшего достаточно запомнить алгоритм их решения, поскольку все равно в случае, если на вступительном экзамене используется факт, выходящий за рамки программы, то его необходимо доказать или хотя бы привести схему доказательства.

Задача 1. В треугольнике ABC из вершин A и B к сторонам BC и AC соответственно проведены отрезки AD и BE, делящие эти стороны в отношении $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{m}{n}$ и $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{p}{q}$. Определить, в каком отношении делятся отрезки AD и BE точкой их пересечения Q.

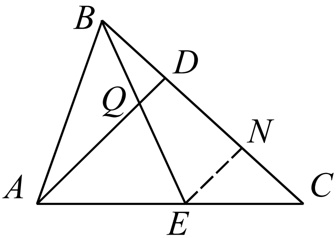


Рис 34

Решение. □ Найдем отношение $\dfrac{BQ}{QE}$. Для этого выполним вспомогательное построение – проведем отрезок $EN \parallel AD.$ Так как $EN \parallel AD,$ то в треугольнике ADC $\dfrac{DN}{NC}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{p}{q}$ и $NC=\dfrac{q}{p}DN$. Откуда $DC=DN+NC=\dfrac{p+q}{p}DN$. По условию $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{m}{n}$ и значит $BD=\dfrac{m}{n}DC=\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{p+q}{p}DN$.

В треугольнике BNE $QD \parallel EN$ и

$$\frac{BQ}{QE}=\frac{BD}{DN}=\frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{p+q}{p}DN}{DN}=\frac{m}{n}\cdot\left(1+\frac{q}{p}\right).$$

Аналогично можно получить, что

$$\frac{AQ}{QD}=\frac{p}{q}\cdot\left(1+\frac{n}{m}\right). \blacklozenge$$

Задача 2. В треугольнике ABC из вершин A и B к сторонам BC и AC соответственно проведены отрезки AD и BE, делящиеся точкой их пересечения Q в отношении $\frac{BQ}{QE}=\frac{m}{n}$ и $\frac{AQ}{QD}=\frac{p}{q}$. Найти отношения $\frac{BD}{DC}$ и $\frac{AE}{EC}$.

Решение. □ *Первый способ.* Эту задачу можно решить, сведя ее к предыдущей задаче. Для этого обозначим $\frac{BD}{DC}=x$ и $\frac{AE}{EC}=y$. Тогда

$\frac{BQ}{QE}=x\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)$ и $\frac{AQ}{QD}=y\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Или $\begin{cases} x\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{m}{n}, \\ y\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{p}{q}. \end{cases}$

Откуда $x=\frac{mp-nq}{n(p+q)}$ и $y=\frac{mp-nq}{q(m+n)}$. �

Второй способ. □ Для решения используем ***метод площадей***. Так как треугольники BDQ и QDC (см. рис. 35) имеют общую высоту и основания их BD и DC лежат на одной прямой, то $\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\vartriangle BQD}}{S_{\vartriangle QDC}}$.

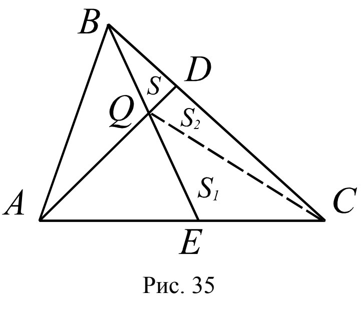


Рис. 35

Аналогично $\frac{AE}{EC}=\frac{S_{\vartriangle AQE}}{S_{\vartriangle QCE}}$.

Обозначим площадь $\vartriangle BDQ$ через S. Для $\vartriangle BDQ$ и $\vartriangle ABQ$ получим $\frac{S_{\vartriangle ABQ}}{S_{\vartriangle BQD}}=\frac{AQ}{QD}=\frac{p}{q}$. Тогда

$S_{\Delta ABQ}=\frac{p}{q}S$.

Аналогично $\frac{S_{\vartriangle ABQ}}{S_{\vartriangle AQE}}=\frac{BQ}{QE}=\frac{m}{n}$ и $S_{\vartriangle AQE}=\frac{n}{m}\cdot\frac{p}{q}S$.

Пусть $S_{\vartriangle QCE}=S_1$, $S_{\vartriangle QDC}=S_2$. Выразим S_1 и S_2 через S.

$$\frac{S_{\triangle AQC}}{S_{\triangle QDC}} = \frac{AQ}{QD} = \frac{p}{q} = \frac{S_{\triangle AQE} + S_{\triangle QCE}}{S_{\triangle QDC}} = \frac{\frac{n}{m}\cdot\frac{p}{q}S + S_1}{S_2}$$

и

$$\frac{S_{\triangle QBC}}{S_{\triangle EQC}} = \frac{BQ}{QE} = \frac{m}{n} = \frac{S_{\triangle BQD} + S_{\triangle QDC}}{S_{\triangle EQC}} = \frac{S + S_2}{S_1}.$$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} S_2 = \dfrac{q}{p}\left(\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{p}{q}S + S_1\right), \\ S_2 = \dfrac{m}{n}S_1 - S. \end{cases}$

Откуда $S_1 = \dfrac{m+n}{m}\dfrac{np}{mp-nq}S$ и $S_2 = \dfrac{n(p+q)}{mp-nq}S$.

Тогда

$$\frac{BD}{DC} = \frac{S_{\triangle BQD}}{S_{\triangle QDC}} = \frac{mp-nq}{n(p+q)};\quad \frac{AE}{EC} = \frac{S_{\triangle AQE}}{S_{\triangle QCE}} = \frac{mp-nq}{q(m+n)}. \blacksquare$$

Задача 3. В треугольнике ABC из вершин A и B к сторонам BC и AC соответственно проведены отрезки AD и BE, делящие эти стороны в отношении $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{m}{n}$ и $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{p}{q}$. Определить, в каком отношении делит сторону AB точка F такая, что отрезок CF содержит точку $Q-$ точку пересечения отрезков AD и BE.

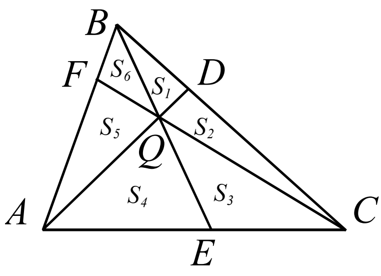


Рис. 36

Решение. □ Найдем отношение $AF:FB$ используя метод площадей. Введем обозначения (см. рис. 36): $S_{\triangle BDQ} = S_1$, $S_{\triangle QDC} = S_2$, $S_{\triangle QCE} = S_3$, $S_{\triangle AQE} = S_4$, $S_{\triangle AFQ} = S_5$, $S_{\triangle BQF} = S_6$.

Тогда, $\dfrac{S_{\triangle BDQ}}{S_{\triangle QDC}} = \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{m}{n}$,

$$\frac{S_{\vartriangle ABD}}{S_{\vartriangle ADC}}=\frac{S_1+S_5+S_6}{S_2+S_3+S_4}=\frac{BD}{DC}=\frac{m}{n},\ \frac{S_{\vartriangle AQE}}{S_{\vartriangle QCE}}=\frac{S_4}{S_3}=\frac{AE}{EC}=\frac{p}{q},$$

$$\frac{S_{\vartriangle BCE}}{S_{\vartriangle ABE}}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_4+S_5+S_6}=\frac{AE}{EC}=\frac{p}{q},\ \frac{S_{\vartriangle FBQ}}{S_{\vartriangle BQC}}=\frac{FQ}{QC}=\frac{S_{\vartriangle AFQ}}{S_{\vartriangle AQC}}$$

или $\dfrac{S_6}{S_1+S_2}=\dfrac{S_5}{S_3+S_4}\Rightarrow\dfrac{S_6}{S_5}=\dfrac{S_1+S_2}{S_3+S_4}$. $S_1=\dfrac{m}{n}S_2$, $\dfrac{S_4}{S_3}=\dfrac{p}{q}$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{S_1+S_5+S_6}{S_2+S_3+S_4}=\dfrac{m}{n},\\ \dfrac{S_1+S_2+S_3}{S_4+S_5+S_6}=\dfrac{p}{q},\\ \dfrac{S_6}{S_5}=\dfrac{S_1+S_2}{S_3+S_4},\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}S_5+S_6=\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{p+q}{q}S_3,\\ S_5+S_6=\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{m+n}{n}S_2,\\ \dfrac{S_6}{S_5}=\dfrac{m+n}{n}\cdot\dfrac{q}{p+q}\dfrac{S_2}{S_3},\end{cases}$$

Из равенства правых частей первого и второго уравнений следует

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p+q}{q}\cdot S_3=\frac{p}{q}\cdot\frac{m+n}{n}\cdot S_2\ \text{ или }\ S_3=\frac{p(m+n)}{m(p+q)}\cdot S_2.$$

Тогда $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{S_6}{S_5}=\dfrac{m+n}{n}\cdot\dfrac{q}{p+q}\cdot\dfrac{S_2}{\dfrac{p(m+n)}{m(p+q)}S_2}=\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{q}{p}$. ■

Задача 4. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты соответственно точки D и E так, что $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{m}{n}$ и $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{p}{q}$. Прямая DE пересекает продолжение стороны AC в точке Q. Найти отношение $\dfrac{CQ}{AC}$.

Решение. □ При решении задачи необходимо учесть положение точки Q. Если $\dfrac{AD}{DB}>\dfrac{EC}{BE}$, то точка Q будет расположена на прямой AC правее точки C, в противном случае – левее точки A (см. рис. 37а и 37б).

Рассмотрим первый случай $\frac{m}{n} > \frac{q}{p}$. Выполним вспомогательное построение – проведем отрезок $CN \parallel AB$. Обозначим длину отрезка BD через x. По условию задачи $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$, т.е. $AD = \frac{m}{n}x$.

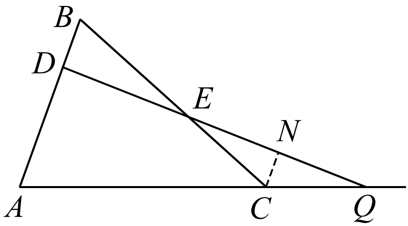


Рис. 37а

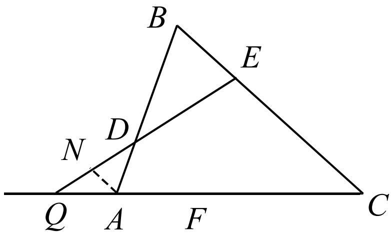


Рис. 37б

Треугольники DBE и NCE подобны ($\angle BED = \angle CEN$ как вертикальные, $\angle BDE = \angle ENC$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB, CN и секущей BC). Следовательно, $\frac{NC}{DB} = \frac{EC}{BE}$, т.е. $NC = \frac{q}{p}DB = \frac{q}{p}x$. Треугольники ADQ и CNQ также подобны. Следовательно,

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{NC}{AD} = \frac{\frac{q}{p}x}{\frac{m}{n}x} = \frac{q}{p} \cdot \frac{n}{m}.$$

Рассмотрим второй случай $\frac{m}{n} < \frac{q}{p}$. Проведем отрезок $NA \parallel BC$. Аналогично предыдущему случаю получим

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}. ◆$$

Приведем несколько теорем, не входящих в стандартную программу курса элементарной геометрии средней школы, но не требующих каких-то дополнительных знаний и позволяющих в ряде задач получить короткое решение.

Теорема Стюарта. Если a, b, c – стороны треугольника ABC и точка D делит сторону BC так, что $BD = a_1$, $CD = a_2$, то

$$AD^2 = \frac{a_1 b^2 + a_2 c^2 - a a_1 a_2}{a}.$$

Теорема Чевы. Если на сторонах треугольника ABC выбраны точки $A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$, то отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Теорема Менелая. Если в треугольнике ABC на сторонах или их продолжениях выбраны точки $A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$, не совпадающие с вершинами треугольника, то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

§ 8. Вписанная в треугольник и описанная окружности

Вписанная окружность. Треугольник называется ***описанным около окружности***, если все его стороны касаются окружности. Такая окружность называется ***вписанной*** в треугольник.

Теорема. ***Во всякий треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника.***

Радиус окружности, вписанной в треугольник, может быть вычислен по формуле:

$$r = \frac{S}{p} \text{ или } r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

где p – полупериметр, S – площадь треугольника.

Описанная окружность. Треугольник называется ***вписанным в окружность***, если все его вершины лежат на этой окружности. Такая окружность называется ***описанной*** около треугольника.

Теорема. ***Около всякого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин сторон этого треугольника.***

Радиус R окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b и c может быть вычислен с использованием формул:

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

$$R = \frac{ab}{2h_c} \text{ или } R = \frac{abc}{4S},$$

где p – полупериметр, S – площадь треугольника, h_c – высота, проведенная из вершины C.

Задача 1. В треугольник ABC площади S вписана окружность радиуса r, которая касается сторон AC и BC соответственно в точках M и N. Найти длину стороны AC, если $AM : MC = 2:3$ и $BN : NC = 5:6$.

Решение: □ Пусть $AC = a$, тогда $AM = 2a/5$ и $MC = 3a/5$.

По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем $NC = MC = 3a/5$ и тогда, из условия $BN : NC = 5:6$, получаем $BN = a/2$.

Если окружность касается стороны AB в точке P, то также

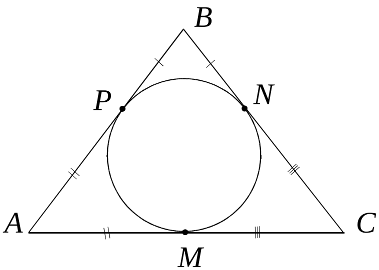


Рис. 38

$$AP = AM = \frac{2a}{5} \quad \text{и} \quad BP = BN = \frac{a}{2}.$$

Из формулы для площади треугольника $S = p \cdot r$ получаем:

$$S = \frac{\left(\frac{4a}{5} + a + \frac{6a}{5}\right)}{2} \cdot r = \frac{3a}{2} \cdot r.$$

Тогда $a = \frac{2}{3} \cdot \frac{S}{r}$.

Следовательно, $AC = \frac{2S}{3r}$. �

Задача 2. Доказать, что сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

Решение: □ Пусть K, L, M – точки касания вписанной окружности; $BC = a$, $AC = b$ (см. рис. 39).

По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности:

$$BK = MB, \quad AM = AL,$$
$$LC = CK = r, \quad AC = r + AL,$$
$$BC = r + KB.$$

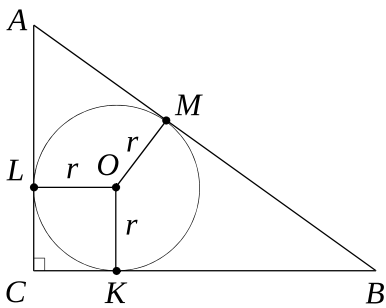


Рис. 39

Тогда

$$AC + BC = 2r + AL + KB.$$

Учитывая, что

$$AL + KB = AM + MB = AB,$$

получим $AC + BC = 2r + AB$.

А так как $AB = 2R$, то

$$AC + BC = 2r + 2R,$$

что и требовалось доказать. �

Задача 3. Точка N лежит на стороне AC правильного треугольника ABC. Найти отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABN и ABC, если $AN : AC = n$.

Решение. □ Пусть a – сторона правильного треугольника ABC (см. рис. 40), тогда $AN = na$. Сторону BN найдем по теореме косинусов:

$$BN = \sqrt{AB^2 + AN^2 - 2 \cdot AB \cdot AN \cdot \cos 60^\circ} = a\sqrt{1 + n^2 - n}.$$

Пусть R_1 – радиус окружности, описанной около треугольника ABN, R_2 – радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Из формулы $S = \dfrac{abc}{4R}$ получаем, что

$$S_{\triangle ABN} = \frac{na^3\sqrt{1+n^2-n}}{4R_1}; \; S_{\triangle ABC} = \frac{a^3}{4R_2}.$$

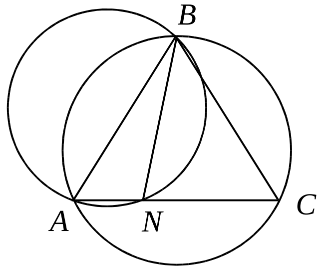


Рис. 40

С другой стороны, треугольники ABN и ABC имеют общую высоту, проведенную из вершины B, поэтому их площади относятся как длины оснований, т.е.

$$S_{\triangle ABN} = n \cdot S_{\triangle ABC}.$$

Подставляя сюда выражения для площадей, получим:

$$\frac{na^3\sqrt{1+n^2-n}}{4R_1} = \frac{na^3}{4R_2} \text{ или } \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{1+n^2-n}. \; ◆$$

Задача 4. Построить равнобедренный треугольник по его основанию c и радиусу вписанной окружности r.

Решение. □ На произвольной прямой отложим отрезок $AB = c$ и из точки N, делящей его пополам, восставим перпендикуляр. На этом перпендикуляре отложим отрезок $ON = r$, из точки O, как из центра, проводим окружность заданного радиуса r, которая будет касаться основания AB. Из точек A и B проводим касательные к построенной окружности, которые пересекутся в точке C. Полученный треугольник ABC - искомый. Постройте рисунок самостоятельно. ◆

§ 9. Площадь треугольника

Приведем основные формулы для вычисления площади треугольника:

1. $S = \frac{1}{2} a h_a$, где $a -$ основание треугольника, $h_a -$ высота;

2. $S = \frac{1}{2} ab \sin \angle C$, где $a, b -$ стороны треугольника, $C -$ угол между ними;

3. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2} -$ полупериметр (***формула Герона***);

4. $S = pr$, где $r -$ радиус вписанной в треугольник окружности, $p -$ полупериметр;

5. $S = \frac{abc}{4R}$, где $R -$ радиус описанной около треугольника окружности.

Если заданы высоты произвольного треугольника h_a, h_b, h_c, то его площадь может быть вычислена по формуле:

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}}.$$

Формулы для вычисления площади равностороннего треугольника:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = 3\sqrt{3} \cdot r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R^2,$$

где $a -$ сторона, $R = 2r = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

При решении задач оказываются полезными следующие теоремы и следствия из приведенных выше формул:

Из формулы $S = \frac{1}{2} a h_a$ следует, что:

1. ***Если у двух треугольников равны основания, то их площади относятся как высоты; если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.***

2. ***Если треугольники*** ABC ***и*** ADE ***имеют общую вершину*** A***, а их стороны*** BC ***и*** DE***, противолежащие вершине*** A***, лежат на одной прямой*** a (см. рис. 41а), ***то*** $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{BC}{DE}$**.**

3. ***Если треугольники*** ABC ***и*** FDE ***расположены так, что их стороны*** BC ***и*** DE ***параллельны, вершина*** A ***лежит на прямой*** DE***, а вершина*** F ***на прямой*** BC (см. рис. 41б), ***то*** $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{BC}{DE}$**.**

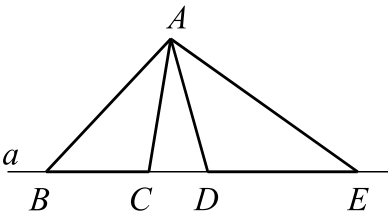


Рис. 41а

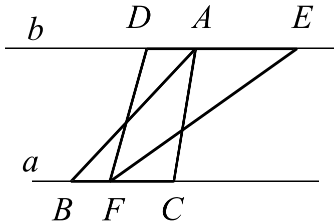


Рис. 41б

Применяя для вычисления площади треугольника формулу $S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C$, легко доказать, что: ***если треугольники*** ABC ***и*** ADE ***имеют равный (или дополнительный) угол, то их площади относятся как произведения сторон, содержащих этот угол*** (см. рис. 42а, 42б и 42в): $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$**.**

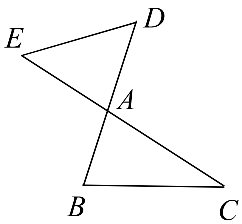


Рис. 42а

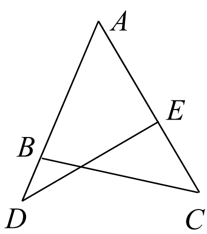


Рис. 42б

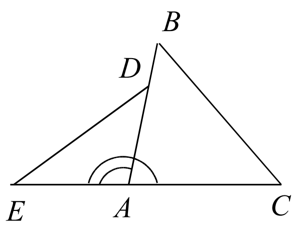


Рис. 42в

Теорема. ***Если треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, то отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия:*** $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\dfrac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = k^2$.

Рассмотрим несколько опорных задач, основанных на приведенных выше теоремах и фактах.

Замечание. При решении следующих задач будет также использовано важное свойство – свойство аддитивности площади: ***если фигура, имеющая площадь, равную S, каким-то способом разделена на n непересекающихся частей, имеющих площади $S_1, \ldots, S_n$ соответственно, то $S = S_1 + \ldots + S_n$.***

Задача 1. Через точку M (см. рис. 43) основания AC треугольника ABC проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Точки N и P – точки пересечения этих прямых со сторонами треугольника. Найти площадь треугольников ABC и NBP, если площади треугольников ANM и MPC равны соответственно S_1 и S_2.

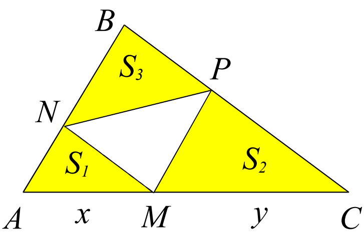


Рис. 43

Решение. □ Пусть $AM = x$, $MC = y$, площади треугольников NBP и ABC соответственно S_3 и S. Так как треугольники ANM и MPC подобны ΔABC ($MN \parallel BC$, $MP \parallel AB$), то $\dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \dfrac{x}{x+y}$ и $\dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \dfrac{y}{x+y}$.

Сложив левые и правые части этих равенств, найдем, что

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{x+y}{x+y} = 1 \text{ или } \sqrt{S_1}+\sqrt{S_2} = \sqrt{S}.$$

Следовательно, $S = (\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. Площадь треугольника NBP равна половине площади параллелограмма $NBPN$, т.е.

$$S_{\triangle NBP} = \frac{1}{2} S_{NBPM} = \frac{S - S_1 - S_2}{2} = \frac{(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2 - S_1 - S_2}{2} = \sqrt{S_1 S_2}. \ ■$$

Задача 2. Через точку O, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Площади образовавшихся треугольников равны S_1, S_2, S_3. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. □ Образовавшиеся треугольники MNO, OPQ, RSO подобны треугольнику ABC (см. рис. 44). Пусть площадь треугольника ABC равна S, тогда $\frac{S_1}{S} = \frac{NO^2}{AC^2}$, $\frac{S_2}{S} = \frac{OQ^2}{AC^2}$, $\frac{S_3}{S} = \frac{RS^2}{AC^2}$ Выражая отсюда NO, OQ, RS, получим:

$$NO = AC \cdot \sqrt{\frac{S_1}{S}},\ OQ = AC \cdot \sqrt{\frac{S_2}{S}},\ RS = AC \cdot \sqrt{\frac{S_3}{S}}.$$

Четырехугольники $ANOR$, $OQCS -$ параллелограммы (в каждом из них противоположные стороны параллельны). Тогда $NO = AR$, $OQ = SC$ и, следовательно

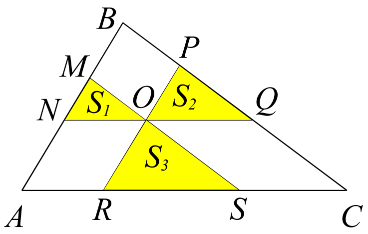


Рис. 44

$$NO + RS + OQ =$$
$$= AR + RS + SC = AC.$$

Таким образом,

$$AC = \left(\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} \right) \cdot AC.$$

Отсюда следует, что $S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \right)^2$. �

Задача 3. На сторонах CA, AB и BC треугольника ABC соответственно взяты точки M, N, P (см. рис. 45) так, что $\frac{AN}{AB} = m$, $\frac{BP}{BC} = n$, $\frac{AM}{AC} = k$. Определить площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ABC равна S.

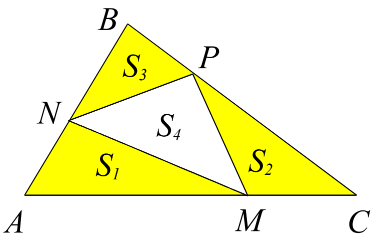


Рис. 45

Решение. □ Обозначим площади треугольников ANM, BNP, PCM через S_1, S_2, S_3. Так как треугольники ANM, BNP, PCM имеют с треугольником ABC по общему углу, то, используя отмеченное выше следствие (см. стр. 74), запишем:

$$\frac{S_{\vartriangle ANM}}{S_{\vartriangle ABC}}=\frac{S_1}{S}=\frac{AN}{AB}\cdot\frac{AM}{AC}=mk\ ,$$

$$\frac{S_{\vartriangle PCM}}{S_{\vartriangle ABC}}=\frac{S_2}{S}=\frac{PC}{BC}\cdot\frac{MC}{AC}=\frac{BC-BP}{BC}\cdot\frac{AC-AM}{AC}=(1-n)(1-k)\ ,$$

$$\frac{S_{\vartriangle NBP}}{S_{\vartriangle ABC}}=\frac{S_3}{S}=\frac{NB}{AB}\cdot\frac{BP}{BC}=\frac{AB-AN}{AB}\cdot\frac{BP}{BC}=(1-m)n\ .$$

Или $S_1=mk\cdot S$, $S_2=(1-n)(1-k)\cdot S$ и $S_3=(1-m)n\cdot S$,

Поскольку $S_{\vartriangle MNP}=S-S_1-S_2-S_3$, то, подставив выражения S_1, S_2, S_3 через S, получим

$$S_4=S-mkS-(1-m)nS-(1-n)(1-k)S=$$
$$=S(mn-mk+k-nk).$$ ■

Задача 4. На сторонах CA, AB и BC треугольника ABC соответственно взяты точки M , N и K так, что $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{KC}{AC}=m$ $(m<0{,}5)$ (см. рис. 46). Вершины треугольника ABC соединены с точками M , N , K отрезками прямых, точки пересечения которых являются вершинами треугольника PQR . Найти его площадь, если площадь треугольника ABC равна S .

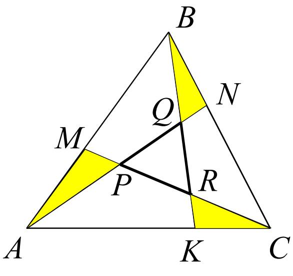


Рис. 46

Решение. □ Площади заштрихованных треугольников AMP, BQN, KRC равны. Действительно,

$$S_{\vartriangle ABN}=S_{\vartriangle BCK}=S_{\vartriangle AMC}=m\cdot S_{\vartriangle ABC}\ .$$

Используя результат задачи №1 §7 главы 3, получим

$$\frac{AP}{PN}=\frac{BQ}{QK}=\frac{CR}{RM}=\frac{m}{(1-m)^2}\,.$$

Тогда

$$S_{\vartriangle AMP}=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AP}{AN}\cdot(mS)=m\left(\frac{AP}{AP+PN}\right)(mS)=\frac{m^3}{1-m+m^2}\cdot S\,.$$

Аналогично вычисляются площади треугольников BQN, KRC. Поскольку

$$S_{\vartriangle ABC}=S_{\vartriangle ABN}+S_{\vartriangle BCK}+S_{\vartriangle AMC}+S_{\vartriangle PQR}-S_{\vartriangle AMP}-S_{\vartriangle BQN}-S_{\vartriangle KRC}\,,$$

(площади заштрихованных треугольников перекрываются дважды). В силу доказанного:

$$S_{\vartriangle ABC}=3S_{\vartriangle ABN}+S_{\vartriangle PQR}-3S_{\vartriangle AMP}\,.$$

Тогда

$$S_{\vartriangle PQR}=S\cdot\left(1-3m+\frac{3m^3}{1-m+m^2}\right)=S\cdot\left(\frac{1-4m+4m^2}{1-m+m^2}\right).$$ �

Задача 5. Найти площадь треугольника, зная длины его сторон a, b и длину биссектрисы l угла, заключенного между этими сторонами.

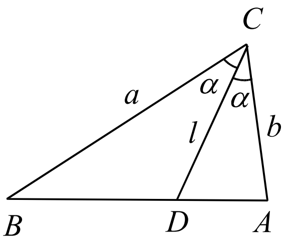


Рис. 47

Решение. □ Пусть половина угла BCA (см. рис. 47) равна α.

Так как площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между этими сторонами, то искомая площадь $S=\frac{1}{2}ab\sin 2\alpha$.

Для нахождения площади необходимо определить значение $\sin 2\alpha$. Заметим, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников BCD и DCA. Поэтому можно написать:

$$\frac{1}{2}ab\sin 2\alpha=\frac{1}{2}al\sin\alpha+\frac{1}{2}bl\sin,$$

или

$$ab\sin 2\alpha=(a+b)l\sin\alpha$$

Следовательно,

$$ab\sin\alpha\cos\alpha = \frac{(a+b)l}{2}\sin\alpha\ .$$

Из последнего равенства следует

$$\cos\alpha = \frac{(a+b)l}{2ab}.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получим

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{(a+b)l}{2ab}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2b^2-(a+b)^2l^2}}{2ab}.$$

Тогда

$$S = \frac{ab}{2}\sin 2\alpha = ab\sin\alpha\cos\alpha = \frac{(a+b)\cdot l\cdot\sqrt{4a^2b^2-(a+b)^2l^2}}{4ab}.$$ �

Задача 6. Найти площадь треугольника, зная длины его сторон a, c и медианы m_b.

Решение. □ Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 48). Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $BE = 2BD = 2m_b$.

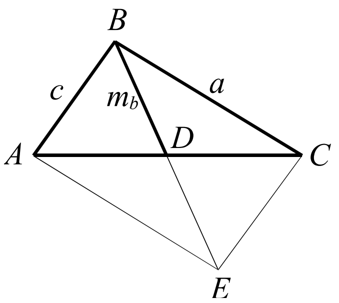


Рис. 48

С другой стороны каждая из диагоналей делит параллелограмм на два равновеликих треугольника, поэтому $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE}$.

Площадь треугольника ABE можно вычислить, используя формулу Герона, поскольку все его стороны известны: $AB = c,\ BE = 2m_b,\ AE = BC = a$.

Тогда

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-c)(p-2m_b)},$$

где $p = \dfrac{a+c+2m_b}{2}$. �

Глава 4. Окружность и круг

§ 1. Основные понятия

Окружность геометрическое место точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии $R > 0$ от фиксированной точки O, называемой ***центром*** окружности. Число R – радиус окружности (круга).

Радиус окружности (круга) – отрезок, соединяющий центр окружности с точкой, лежащей на окружности.

Хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности.

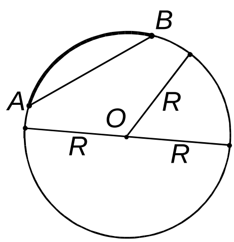


Рис. 1

Круг – часть плоскости, ограниченная окружностью.

Секущей называется прямая, проходящая через две произвольные точки окружности.

Диаметр – хорда, проходящая через центр окружности. Обычно диаметр обозначается буквами d или D.

Примечание: слово «радиус» имеет двойной смысл: оно означает отрезок, а также длину этого отрезка; такой же двойной смысл имеет слово «диаметр».

Дуга окружности – часть окружности, заключенная между двумя ее точками. Для обозначения дуги часто пользуются специальным знаком $\cup$, и, например, вместо «дуга AB» можно писать $\cup AB$.

Через одну точку можно провести бесконечно много окружностей с произвольно выбранными центрами и радиусами.

Через две точки A и B можно провести бесконечно много окружностей с произвольно выбранными радиусами, но не меньшими половины расстояния между данными точками. Центры таких окружностей будут лежать на одной прямой, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через середину этого отрезка.

Через три заданные точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну. Ее центр будет находиться в точке пересечения прямых, перпендикулярных отрезкам AB, BC и AC, проходящим через середины этих отрезков.

Через три точки, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружность.

Касательная

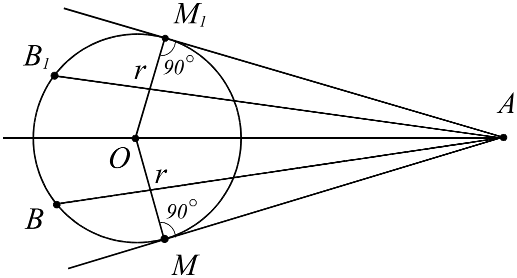


Рис. 2

Касательной к окружности называется прямая, имеющая одну общую точку с окружностью и лежащая в ее плоскости. Общая точка прямой с окружностью называется ***точкой касания***.

Длиной касательной, проведенной из точки A к заданной окружности с точкой касания M, называется отрезок AM (см. рис. 2). Обычно под термином ***касательная*** и понимают лишь этот отрезок. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу (диаметру), проведенному в точку касания.

Из точки вне круга можно провести к окружности две касательные. Длины этих касательных равны между собой, так как два прямоугольных треугольника AOM и AOM_1 равны, поскольку имеют общую гипотенузу и по одному равному катету $OM = OM_1 = r$.

$OA-$ биссектриса угла M_1AM.

Через точку, лежащую на окружности, можно провести лишь одну касательную к этой окружности. Через точку, лежащую внутри окружности, провести касательную к данной окружности нельзя. Однако через любую точку, лежащую вне, на или внутри окружности, можно провести бесконечное количество секущих.

Касательную к окружности можно рассматривать как предельное положение секущих $AB,\ AB_1,\ AB_2, \ldots,$ проведенных из заданной точки A, расположенной вне или на самой окружности. В последнем случае точка A совпадает с точкой M (или M_1).

Если касательная параллельна хорде, то точка касания делит дугу, стягиваемую хордой, пополам.

Принято говорить, что прямая MN и дуга AB некоторой окружности O ***сопряжены***, если они имеют общую точку (например, точку B) и в этой точке прямая MN является касательной к данной дуге AB.

Две дуги, сходящиеся в некоторой точке B, называются ***сопряженными***, если в этой точке они имеют общую касательную.

В одном круге или в равных кругах:

1) если дуги равны, то и стягивающие их хорды равны и одинаково удалены от центра;
2) если две дуги, меньшие полуокружности, не равны, то большая из них стягивается большей хордой и из обеих хорд большая расположена ближе к центру.

Касающимися окружностями называются такие две окружности, которые имеют лишь одну общую точку. Точка касания окружностей и их центры лежат на одной прямой.

Две окружности, имеющие две общие точки, называются ***пересекающимися.***

Трех общих точек две неравные окружности иметь не могут, так как, в противном случае, через три точки оказались бы проведенными две разные окружности, что невозможно.

Две или несколько окружностей называются ***концентрическими***, если их центры совпадают (находятся в одной точке). Две равные окружности имеют бесконечно много общих точек, если они концентрические.

Линией центров двух окружностей называется прямая, проходящая через их центры. Если две окружности имеют общую точку, расположенную вне линии центров, то они имеют еще и другую общую точку, симметричную первой относительно линии центров. Такие окружности пересекаются. Если две окружности имеют общую точку, лежащую на линии центров, то они в этой точке касаются.

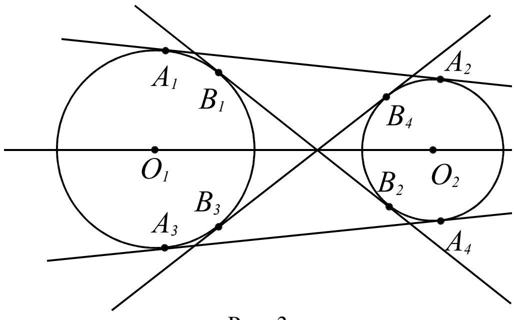


Рис. 3

К двум окружностям, расстояние между центрами которых больше суммы их радиусов, можно провести четыре общих касательных (две внешние A_1A_2, A_3A_4 и две внутренние B_1B_2, B_3B_4) (см. рис. 3). Точки пересечения внешних, а также внутренних касательных, лежат на линии центров окружностей.

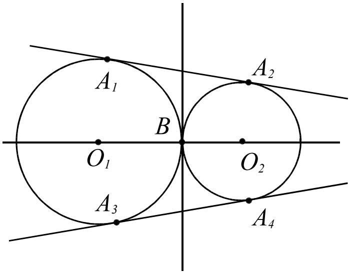


Рис. 4

К двум внешне касающимся окружностям можно провести три общих касательных (см. рис. 4). Одна из них будет проходить через точку касания перпендикулярно линии центров O_1O_2. В частности, при $R_1 = R_2$ две других касательных параллельны линии центров.

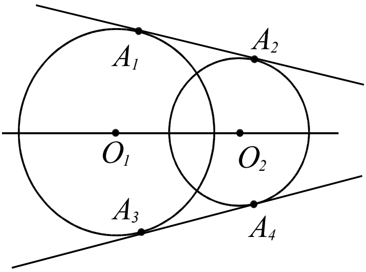


Рис. 5

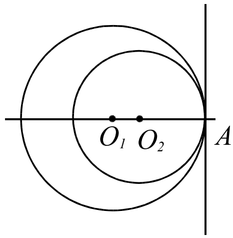


Рис. 6

К двум пересекающимся окружностям можно провести лишь две общие касательные (см. рис. 5).

Две внутренне касающиеся окружности имеют одну общую касательную, она перпендикулярна их линии центров (см. рис. 6).

Части круга

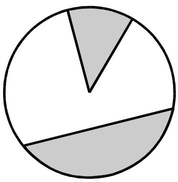


Рис. 7

Сектор – часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами (см. рис. 7).

Сегмент – часть круга, ограниченная дугой и хордой (см. рис. 7).

Свойства дуг и хорд.

Дуги одной и той же окружности ***равны*** между собой, если при совмещении этих дуг их концы совпадают. Если при совмещении двух дуг одной окружности два конца их совпадают, а два других не совпадают, то дуги не равны, причем та дуга считается меньшей, которая составит часть другой.

Теоремы:

(1) ***Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.***

Доказательство: □ Пусть AB – хорда окружности, CD – диаметр, перпендикулярный AB и пересекающий ее в точке K (см. рис. 8). Проведем радиусы OA и OB. Треугольник AOB равнобедренный с основанием AB (стороны OA и OB равны как радиусы). Отрезок OK в этом треугольнике является высотой, и, следовательно, медианой. Значит, точка K делит хорду AB пополам. Из равенства прямоугольных треугольников AKC и CKB ($AK = KB$, $CK -$ общая) следует, что хорды $AC = CB$. Следовательно, и дуги равны, т.е. $\cup AC = \cup CB$.

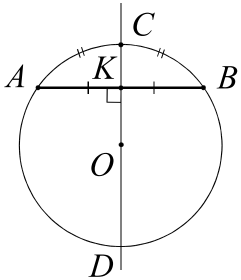


Рис. 8

Аналогично доказывается, что $\cup AD = \cup DB$. ◆

(2) ***Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.***

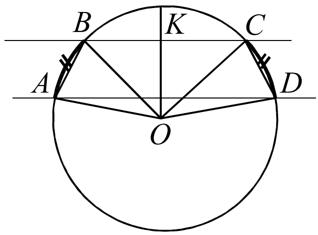


Рис. 9

Доказательство: □ Проведем радиус OK перпендикулярный хордам AD и BC (см. рис. 9). По предыдущей теореме дуги BK и KC равны. Аналогично равны и дуги AK и KD . Отнимая от равных дуг AK и KD равные дуги BK и KC , получим, что дуги AB и CD , заключенные между параллельными прямыми равны. ◆

(3) ***Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.***

Доказательство: □ Если прямая касается окружности в точке K (см. рис. 10), то все остальные точки этой прямой должны лежать вне окружности. Поэтому все отрезки $OM, ON, \ldots$ будут больше радиуса OK . Значит этот радиус является наименьшим из отрезков, соединяющих точку O с любой точкой этой прямой, и поэтому OK перпендикулярен касательной. ◆

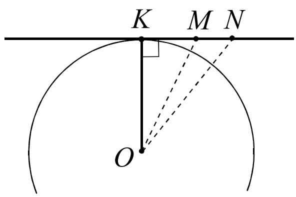


Рис. 10

Задача 1. Найти длины общих касательных к окружностям, радиусов R и r, если расстояние между их центрами равно l ($l > R + r$).

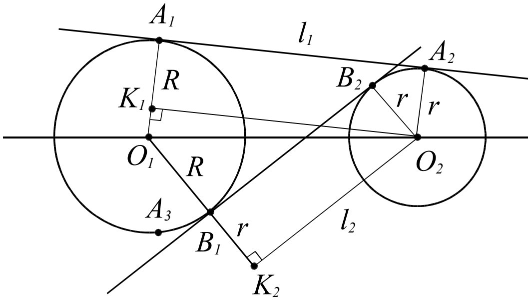


Рис. 11

Решение. □ Пусть A_1A_2 и B_1B_2 – внешняя и внутренняя касательные (см. рис. 11). Из центра меньшей окружности опустим перпендикуляры O_2K_1 и O_2K_2 на радиус O_1A_1 и продолжение радиуса O_1B_1 соответственно. Рассмотрим прямоугольные треугольники $O_1K_1O_2$ (гипотенуза $O_1O_2 = l$, катет $O_1K_1 = R - r$) и $O_1K_2O_2$ (гипотенуза $O_1O_2 = l$ катет $O_1K_2 =$ $= R + r$). Из теоремы Пифагора для этих треугольников получим:

$$l_1 = A_1A_2 = \sqrt{l^2 - (R-r)^2} \text{ – } \textit{длина внешней касательной}:$$

$$l_2 = B_1B_2 = \sqrt{l^2 - (R+r)^2} \; l_2 \text{ – } \textit{длина внутренней касательной}. \blacksquare$$

Задача 2. К окружности, радиуса R, из точки M, находящейся на расстоянии l от ее центра, проведены касательные MB_1 и MB_2. Через произвольную точку C меньшей из дуг B_1B_2 проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки MB_1 и MB_2 в точках A_1 и A_2 соответственно. Найти периметр треугольника A_1MA_2.

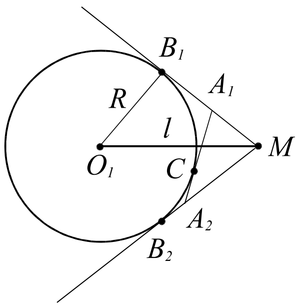


Рис. 12

Решение. □ Касательные MB_1 и MB_2 равны $\sqrt{l^2 - R^2}$. Поскольку $A_1B_1 = A_1C$ и $A_2B_2 = A_2C$, как касательные, проведенные к окружности из одной точки, то периметр треугольника A_1MA_2 равен

$$A_1A_2 + A_1M + MA_2 =$$

$$= B_1A_1 + B_2A_2 + A_1M + MA_2 = B_1M + B_2M = 2\sqrt{l^2 - R^2}. \blacksquare$$

Задача 3. В треугольник со сторонами a, b, c вписана окружность. Найти расстояния от вершин треугольника до точек касания.

Решение. □ Пусть p – полупериметр треугольника. Рассмотрим вершину A (см. рис. 13). Отрезки $AK_c = AK_b$, как касательные, проведенные к окружности из одной точки. Аналогично $BK_c = BK_a$ и $CK_a = CK_b$. Заметим, что длина ломаной $K_cBCK_b = 2BK_a + 2K_aC = 2a$. Тогда

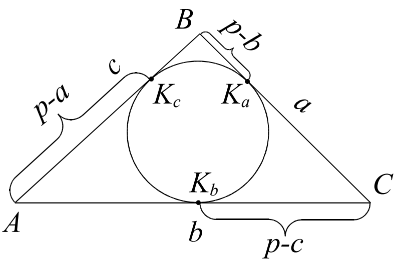


Рис. 13

$$AK_c = AK_b = \frac{2p - 2a}{2} = p - a.$$

Аналогично получаем $BK_c = BK_a = p - b$, $CK_a = CK_b = p - c$. ◆

Задача 4. На плоскости между двумя концентрическими окружностями радиусов r и R вписаны четыре круга так, что они попарно касаются друг друга и каждый из них касается обеих концентрических окружностей. Найти отношение R / r.

Решение. □ Пусть точки O_1, O_2, O_3, O_4 – центры вписанных кругов (см. рис. 14). Для любого вписанного круга его центр и точки касания им малого и большого кругов и их центры лежат на одной прямой. Отсюда следует, что радиусы вписанных кругов равны $\dfrac{R-r}{2}$.

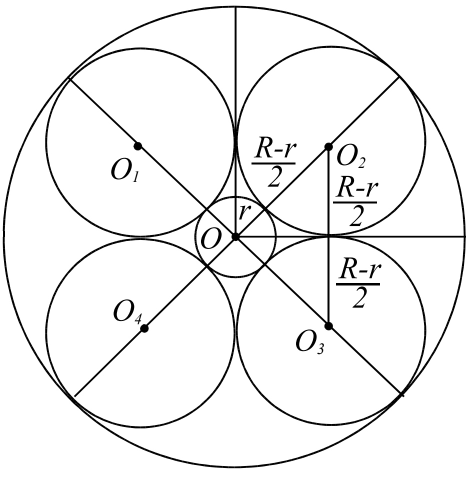


Рис. 14

Так как центры любой пары вписанных кругов и точка их касания также лежат на одной прямой, то четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ – ромб. Диагонали ромба перпендикулярны. Следовательно треугольник OO_2O_3 – прямоугольный.

$$OO_2 = OO_3 = r + \frac{R-r}{2} = \frac{R+r}{2},\ O_2O_3 = R - r.$$

Из теоремы Пифагора следует $OO_2^{\ 2} + OO_3^{\ 2} = O_2O_3^{\ 2}$ или $2\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 = (R-r)^2$. Разделив левую и правую части равенства на r^2, получим $\left(\frac{R}{r}+1\right)^2 = 2\left(\frac{R}{r}-1\right)^2$.

Сделав замену $\frac{R}{r} = x$, получим уравнение $x^2 - 6x + 1 = 0$, корнями которого являются числа $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$, а поскольку $R > r$, то $\frac{R}{r} = 3 + 2\sqrt{2}$. �

Задача 5. Диаметр CD параллелен хорде AB той же окружности (см. рис. 15). Найти длину хорды AB, если $AC = b$ и $BC = a$ $(a > b)$.

Решение. □ Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны. Кроме того, равные дуги стягиваются равными хордами, поэтому $BD = AC = b$.

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой, следовательно, $\angle CBD = 90°$ и треугольник CBD – прямоугольный. По теореме Пифагора для треугольника CBD находим $CD = \sqrt{a^2 + b^2}$.

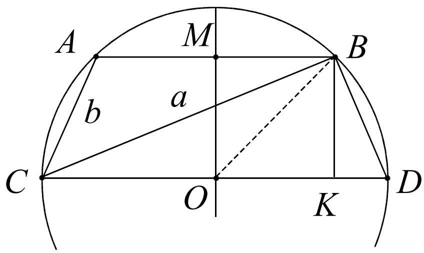


Рис. 15

Опустим перпендикуляр BK из точки B на CD. Высоту BK прямоугольного треугольника CBD можно получить по формуле $BK = \frac{CB \cdot BD}{CD}$, где CB, BD – катеты, а CD – гипотенуза. Следовательно, $BK = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Пусть O – центр окружности и $OM \perp AB$. Отрезки двух параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными прямыми, равны между собой, следовательно $OM = BK$. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам, поэтому $AM = MB$. Из прямоугольного треугольника OMB, в котором $OB = CD/2$, находим

$$MB = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}} = \frac{a^2-b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда $AB = \dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ♦

Задача 6. Из точки A проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса r в точках M и N. Найти длину отрезка MN, если расстояние от точки A до центра окружности равно a.

Решение: □ По свойству радиуса, проведенного в точку касания, $OM \perp MA$, $ON \perp AN$ (см. рис. 16).

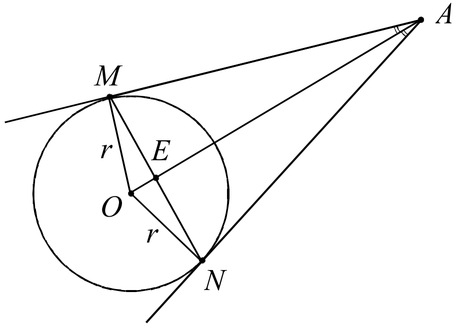


Рис. 16

Треугольники OAM и ONA – прямоугольные и равны по катету ($OM = ON = r$) и гипотенузе OA. Следовательно, $\angle OAM = \angle OAN$ и $AN = AM$. Тогда треугольник AMN – равнобедренный. Так как EA – биссектриса, то EA – медиана и высота, т.е. $ME = EN$, $AE \perp MN$.

Для площади прямоугольного треугольника OMA имеем:

$$S = \frac{1}{2} ME \cdot OA = \frac{1}{2} OM \cdot MA,$$

откуда, так как $MA = \sqrt{a^2 - r^2}$, $OA = a$ и $OM = r$, находим

$$ME = \frac{r}{a}\sqrt{a^2 - r^2} \text{ и } MN = \frac{2r}{a}\sqrt{a^2 - r^2}. ♦$$

§ 2. Углы, связанные с окружностью

Центральный угол – угол, вершина которого лежит в центре окружности (см. рис. 17). Величина центрального угла равна величине соответствующей дуги (выраженной в радианах или градусах).

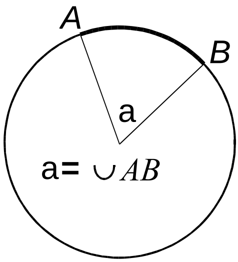


Рис. 17

Градусная мера. За угол $\alpha = 1°$ принимается центральный угол, опирающийся на дугу, составляющую $\frac{1}{360}$ часть всей окружности. Во всей окружности $360°$. Величина данного угла не зависит от радиуса окружности.

Радианная мера. За угол $\alpha = 1\, рад$. принимается центральный угол, опирающийся на дугу данной окружности, длина которой равна радиусу окружности, т.е. $l_\alpha = R$ (см. рис. 18). Радианная мера данного угла есть $\alpha = \frac{l_\alpha}{R}$, т.е. безразмерная величина, не зависящая от радиуса данной окружности.

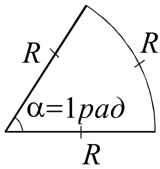


Рис. 18

Угол, опирающийся на всю окружность равен 2π *радиан*.

Независимо от выбранной меры, центральный угол измеряется всей дугой, на которую он опирается.

Вписанный угол – угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются хордами (см. рис. 19).

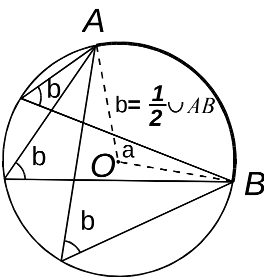


Рис. 19

Теорема 1. ***Величина вписанного угла равна половине дуги, заключенной внутри угла.***

Значит, все вписанные углы данной окружности, опирающиеся на одну дугу, равны и составляют половину соответствующего центрального угла, т.е.

$$\beta = \frac{\alpha}{2}.$$

Следствие. ***Вписанный угол, опирающийся на диаметр, – прямой.***

Теорема 2. ***Угол, образованный касательной и хордой, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой*** (см. рис. 20).

Примечание: предполагается, что вершина угла является точкой касания.

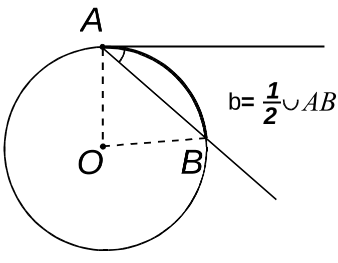


Рис. 20

Доказательство: □ Пусть искомый угол равен β. Проведем радиусы OA и OB. Отрезок OA перпендикулярен касательной, поэтому угол BAO равен $90° - \beta$. Так как треугольник ABO равнобедренный ($OA = OB$ как радиусов), то $\angle AOB = 180° - 2(90° - \beta) = 2\beta$.

Но угол AOB является центральным для окружности, поэтому $2\beta = \cup AB$. Отсюда получаем, что $\beta = \frac{1}{2} \cup AB$. �

Теорема 3. ***Угол (образованный пересекающимися хордами) с вершиной внутри окружности равен полусумме соответствующих дуг.***

Доказательство: □ Пусть хорды AC и BD пересекаются в точке K (см. рис. 21). Угол AKB равен углу DKC (как вертикальные). Проведем хорду AB. Тогда в $\triangle AKB$ угол BAC равен половине дуги BC, а угол ABD – половине дуги AD.

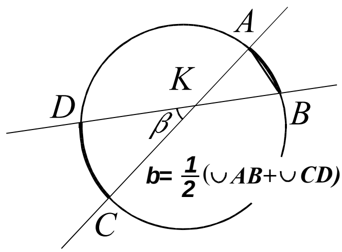


Рис. 21

Так как сумма углов в треугольнике равна $180°$, то

$$\beta = 180° - \angle ABK - \angle BAK =$$

$$180° - \frac{1}{2}\left(\cup AD + \cup BC\right).$$

Следовательно,

$$2\beta = 360° - \left(\cup AD + \cup BC\right) = \cup AB + \cup CD.$$

Значит $\beta = \frac{1}{2}\left(\cup AB + \cup CD\right)$. �

Теорема 4. ***Угол, образованный секущими к окружности, с вершиной вне окружности равен полуразности соответствующих дуг.***

Доказательство: □ Проведем хорду CB (см. рис. 22). Тогда угол ACB равен половине градусной меры дуги AB (как вписанный угол), а угол CBD равен половине градусной меры дуги CD. Рассмотрим треугольник MCB. Для него угол ACB является и равен сумме углов CMB и CBM.

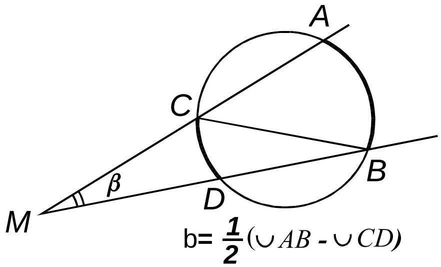


Рис. 22

Выразим угол CMB:

$$\beta = \angle ACB - \angle CBM = \frac{1}{2}(\cup AB - \cup CD)\,.$$ �

Задача 1. Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B (см. рис. 23). Найти длину диагонали BD, если длины оснований трапеции равны a и b.

Решение. □ Угол между касательной AB и хордой BD, как и вписанный угол BCD, измеряются половиной угловой величины дуги BD, и, следовательно, они равны. Основания трапеции параллельны, поэтому $\angle CBD = \angle BDA$. Таким образом, треугольники ABD и BCD имеют по два равных угла и, следовательно, подобны. Из подобия получаем

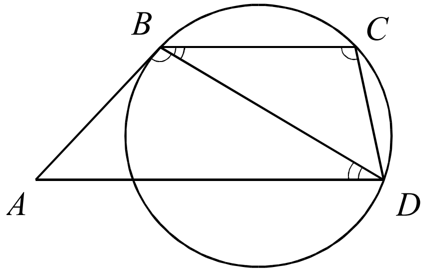


Рис. 23

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{BD},$$

откуда получаем $BD^2 = AD \cdot BC$ и

$$BD = \sqrt{AD \cdot BC} = \sqrt{ab}\,.$$ �

§ 3. Метрические соотношения в круге

1. Теорема (о секущих): ***Если через точку M вне окружности провести две секущие, то произведения длин секущих на их внешние части будут равны:*** $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Доказательство: □ Проведем хорды AD и CB (см. рис. 24). Рассмотрим треугольники MBC и MAD. Эти треугольники подобны по двум углам: $\angle M$ – общий, а $\angle MBC = \angle ADM$, как вписанные и опирающиеся на одну дугу. Из подобия запишем отношение сторон

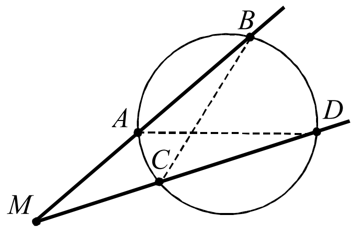


Рис. 24

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB},$$

из которого следует доказываемое равенство

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \text{ . �}$$

2. Теорема (о секущей и касательной): ***Если через точку M вне окружности провести секущую и касательную, то произведение длины секущей на ее внешнюю часть будет равно квадрату длины касательной:*** $MA \cdot MB = MK^2$ **.**

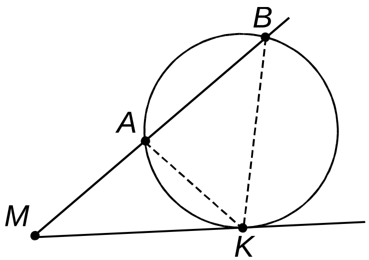


Рис. 25

Доказательство: □ Проведем хорды KA и KB (см. рис. 25). Рассмотрим треугольники MKA и MKB . Эти треугольники подобны по двум углам: $\angle M$ – общий, а $\angle MKA = \angle MBK$, так как оба угла равны половине градусной меры дуги AK ($\angle MKA$ – угол между хордой AK и касательной MK , а $\angle MBK = \angle ABK$ – вписанный, опирающийся на дугу AK). Из подобия треугольников получаем отношение сторон

$$\frac{MA}{MK} = \frac{MK}{MB},$$

из которого следует доказываемое равенство $MK^2 = MA \cdot MB$. �

3. Теорема (о хордах): ***Если через точку M внутри окружности провести две хорды AB и CD, то произведения отрезков этих хорд будут равны:*** $AM \cdot MB = DM \cdot MC$.

Доказательство. □ Проведем хорды AD и CB (см. рис. 26). Рассмотрим треугольники MBC и MAD. Эти треугольники подобны по двум углам: $\angle AMD = \angle BMC$ как вертикальные, а $\angle MDA = \angle MBC$, так как они равны углам, вписанным и опирающимся на одну дугу ($\angle MDA = \angle CDA$, $\angle MBC = \angle ABC$). Из подобия запишем отношение сторон:

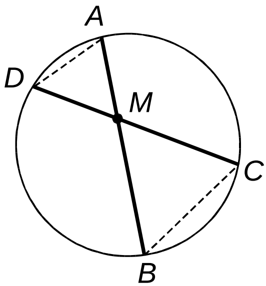


Рис. 26

$$\frac{AM}{MC} = \frac{DM}{MB}$$

или, преобразовав, получим доказываемое равенство

$$AM \cdot MB = DM \cdot MC. ■$$

Задача 1. Из точки M проведена секущая MB окружности, радиуса r, проходящая через ее центр, и касательная MA, причем $MB = 2MA$. Найти расстояние от центра окружности до точки M.

Решение: □ Пусть $OM = x$ (см. рис. 27), тогда $BM = x + r$ и $CM = x - r$. По условию $MA = \frac{BM}{2} = \frac{1}{2}(x + r)$.

По теореме о касательной и секущей:

$$MA^2 = MC \cdot MB.$$

Тогда

$$\frac{1}{4}(x + r)^2 = (x - r)(x + r),$$

откуда, сокращая на $(x + r)$, получаем $\frac{1}{4}(x + r) = x - r$.

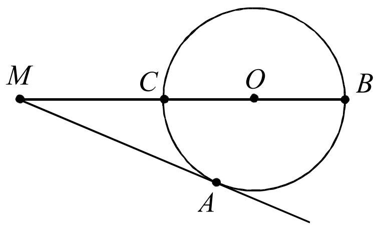


Рис. 27

Следовательно, $x = \frac{5}{3} r$. ■

Задача 2. Через точку M, удаленную от центра окружности на расстояние b, проведена секущая MA так, что она делится окружностью пополам $MB = BA$. Определить длину секущей MA, если радиус окружности равен r.

Решение: □ Проведем секущую MC через центр окружности (см. рис. 28). По теореме о секущих, проведенных из одной точки к окружности, имеем:

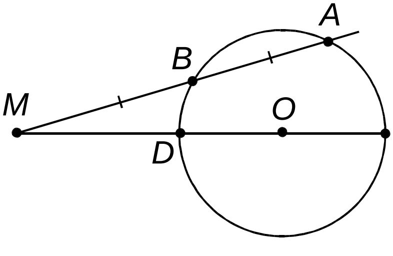


Рис. 28

$$MA \cdot MB = MD \cdot MC \quad (*),$$

т.к. оба этих произведения равны квадрату длины касательной, проведенной из точки M к этой же окружности. По условию $OM = b$, поэтому $MC = b + r$, $MD = b - r$.

Пусть $MA = x$, тогда $MB = x/2$. Подставляя в формулу (*), получаем $x \cdot \dfrac{x}{2} = (b + r)(b - r)$. Следовательно, $x = \sqrt{2(b^2 - r^2)}$. ◆

Задача 3. Две окружности внутренне касаются в точке Q. Прямая, проходящая через центр O_1 меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и D, а меньшую – в точках B и C. Найти отношение радиусов этих окружностей, если $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.

Решение. □ Пусть R и r – соответственно радиусы большей и меньшей окружностей (см. рис. 29), тогда $BC = 2r$ и из заданной пропорции $AB = r$, а $CD = 1{,}5r$. Проведем диаметр PQ. Точка касания окружностей Q и их центры, т.е. точки O и O_1 лежат на одной прямой QP. По свойству пересекающихся хорд имеем: $O_1Q \cdot O_1P = O_1A \cdot O_1D$.

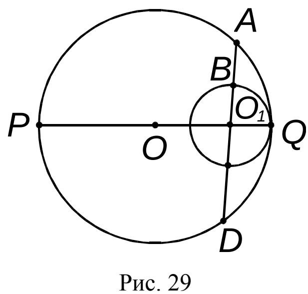


Рис. 29

Учитывая, что $O_1P = 2R - r$, $O_1A = O_1B + BA = 2r$ и $O_1D = CD + CO_1 = 2{,}5r$, получаем,

$$(2R - r) \cdot r = 5r^2 \text{ или } \frac{R}{r} = 3. \text{ ◆}$$

Задача 4. Около квадрата со стороной 10 *см* описана окружность, и в один из образовавшихся сегментов вписан квадрат. Найти длину стороны этого квадрата.

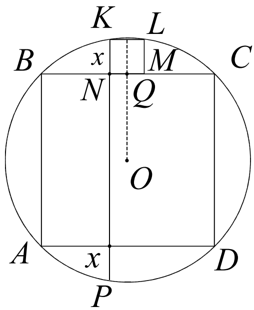


Рис. 30

Решение. □ Пусть длина стороны квадрата $KLMN$ равна x (см. рис. 30). Через сторону KN проведем хорду KP и воспользуемся теоремой о пересекающихся хордах $BN \cdot NC = KN \cdot NP$. (1)

Проведем радиус, перпендикулярный хордам KL и BC. Он разделит их пополам. Точка $Q-$ середина NM и BC. Тогда $BN = 5 - x/2,\quad NC = 5 + x/2$. Хорда KP разбита на отрезки $KN = x$, $NP = 10 + x$. Подставляя найденные значения в (1), получим уравнение $\left(5 - x/2\right)\left(5 + x/2\right) = x(10 - x)$ или $x^2 + 8x - 20 = 0$, корнями которого являются числа $x_1 = -10, x_2 = 2$. Следовательно, длина стороны квадрата $KLMN$ равна 2 *см*. �

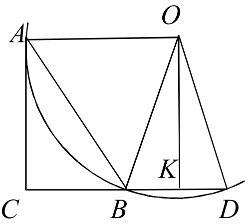


Рис. 31

Задача 5. Через вершины A и B прямоугольного $\triangle ABC$ (угол C – прямой) проведена окружность, касающаяся стороны AC и пересекающая продолжение стороны BC в точке D. Найти ее радиус, если известно, что $AB = 3$ *см* и $CD = 3{,}2$ *см*.

Решение. □ Обозначим искомый радиус через R. Из точки O опустим на продолжение стороны CD перпендикуляр OK (см. рис. 31). Тогда $CK = AO = R$, $KD = CD - R$.

Так как $\triangle BOD$ – равнобедренный, то $BK = KD$. Тогда $CB = CD - 2KD$ или $CB = 3{,}2 - 2(3{,}2 - R) = 2R - 3{,}2$. Отсюда $R = 0{,}5 \cdot CB + 1{,}6$.

Найдем CB. Из теоремы Пифагора для $\triangle CAB$ получим $CA^2 = AB^2 - CB^2$. Из теоремы о касательной CA и секущей CD, проведенных к окружности из одной точки, $CA^2 = CB \cdot CD$. Тогда $AB^2 - CB^2 = CB \cdot CD$, или $9 - CB^2 = CB \cdot 3{,}2$. Отсюда, учитывая, что $CB > 0$, получаем $CB = 1{,}8$. Следовательно, $R = 0{,}9 + 1{,}6 = 2{,}5$. �

§ 4. Вписанные в окружность и описанные четырехугольники

Описанные четырехугольники

Четырехугольник называется ***описанным***, если существует окружность, касающаяся всех его сторон. Такая окружность называется ***вписанной***.

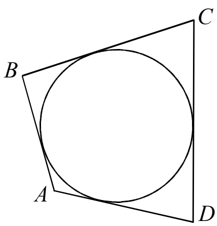


Рис. 32

Теорема. ***В четырехугольник*** $ABCD$ ***можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон четырехугольника равны друг другу, т.е.*** (см. рис. 32)

$$AB + CD = BC + AD.$$

Следствие. В любой ромб можно вписать окружность.

Полезные факты:

Центр окружности вписанной в четырехугольник, лежит в точке пересечения биссектрис всех внутренних углов данного четырехугольника.

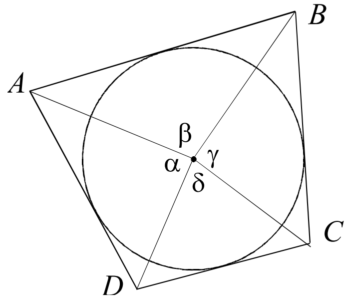


Рис. 33

Если в четырехугольник вписана окружность, то суммы углов между парами отрезков, направленных из центра окружности к концам противоположных сторон четырехугольника равны 180° (см. рис. 33), т.е.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°.$$

Если в трапецию вписана окружность, то отрезки, соединяющие центр окружности с концами боковой стороны трапеции, перпендикулярны.

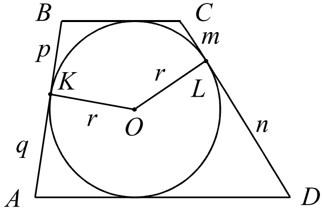


Рис. 34

Если в трапецию вписана окружность и $m, n, p, q -$ длины отрезков от точек касания до вершин (см. рис. 34), то для вычисления радиуса окружности можно использовать формулы: $r = \sqrt{mn} = \sqrt{pq}$.

Площадь описанного четырехугольника может быть вычислена по формуле:

$$S = pr,$$

где $p -$ полупериметр четырехугольника, $r -$ радиус окружности.

Если выпуклый четырехугольник имеет ось симметрии, проходящую через одну из его вершин, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Вписанные четырехугольники

Четырехугольник называется ***вписанным***, если существует окружность, проходящая через все его вершины. Такая окружность называется ***описанной***.

Теорема. ***Около четырехугольника*** $ABCD$ ***можно описать окружность в том и только том случае, если суммы противоположных углов четырехугольника равны друг другу, т.е.*** (см. рис 35)

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ .$$

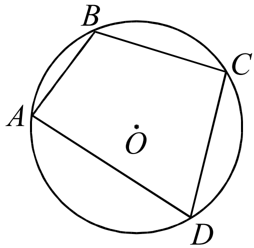


Рис. 35

Следствие. Около любого прямоугольника, любой равнобедренной трапеции можно описать окружность.

Площадь вписанного четырехугольника может быть вычислена по формуле:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} ,$$

где $a, b, c, d -$ стороны, а $p -$ полупериметр четырехугольника.

Примечание. Приведенная формула не справедлива (!) для произвольного четырехугольника.

При диагональном разбиении вписанного четырехугольника образуется четыре пары равных углов (см. рис. 36):

$$\angle BCA = \angle BDA, \quad \angle ABD = \angle ACD,$$

$$\angle DBC = \angle DAC, \quad \angle BAD = \angle BDC.$$

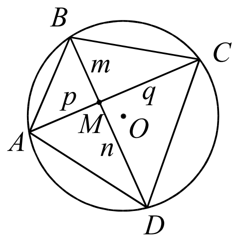


Рис. 36

Произведения длин отрезков, на которые каждая диагональ вписанного четырехугольника разбивается точкой пересечения диагоналей, равны $mn = pq$ (см. рис. 36).

Признаки вписанного четырехугольника.

(a) если при диагональном разбиении четырехугольника равны какие-нибудь два угла, опирающиеся на одну сторону, то этот четырехугольник – вписанный;

(б) если произведения длин отрезков, на которые каждая диагональ четырехугольника разбивается точкой пересечения диагоналей, равны, то этот четырехугольник – вписанный;

(в) если сумма противоположных углов четырехугольника равна $180°$, то этот четырехугольник – вписанный.

Для четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность справедливы следующие теоремы:

Теорема Птолемея. ***В выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон:***

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD\text{.}$$

Доказательство. □ Проведем отрезок AM так, чтобы угол BAM был равен углу CAD (см. рис. 37). Тогда треугольник ABM подобен треугольнику ACD по двум углам: $\angle BAM = \angle CAD$ по построению, $\angle DCA = \angle DBA$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AD. Из подобия треугольников следует отношение: $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CD}$.

Выразим $BM = \frac{AB \cdot CD}{AC}$.

Рассмотрим треугольники ABC и ADM. Они подобны по двум углам: $\angle ADB = \angle ACB$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AB,

$\angle DAM = \angle DAC + \angle CAM =$
$= \angle BAM + \angle CAM = \angle CAB$. Из подобия треугольников следует равенство:

$$\frac{DM}{BC} = \frac{AD}{AC}.$$

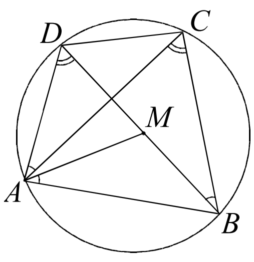


Рис. 37

Выразим $DM = \frac{BC \cdot AD}{AC}$. Тогда

$$BD = BM + MD = \frac{AB \cdot CD}{AC} + \frac{BC \cdot AD}{AC}.$$

Откуда, умножая обе части равенства на AC, получаем:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD\text{. ◆}$$

Теорема Стюарта. ***В выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность справедливо соотношение:***

$$AC \cdot \left(AB \cdot BC + AD \cdot DC\right) = BD \cdot \left(AB \cdot AD + BC \cdot CD\right).$$

Доказательство. □ Площадь четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 37) равна $S_{ABCD} = S_{\vartriangle ABC} + S_{\vartriangle ADC}$. Пусть R – радиус описанной окружности. Выражая площади треугольников через радиус описанной окружности, получим

$$S_{ABCD} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} + \frac{AD \cdot DC \cdot AC}{4R} = \frac{AC}{4R}\left(AB \cdot BC + AD \cdot DC\right).$$

С другой стороны, площадь четырехугольника $ABCD$ можно выразить как $S_{ABCD} = S_{\vartriangle BCD} + S_{\vartriangle ABD} =$

$$= \frac{BC \cdot CD \cdot BD}{4R} + \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4R} = \frac{BD}{4R}\left(BC \cdot CD + AB \cdot AD\right).$$

Приравнивая эти выражения для площади и умножая равенство на $4R$, получаем искомое равенство:

$$AC \cdot \left(AB \cdot BC + AD \cdot DC\right) = BD \cdot \left(AB \cdot AD + BC \cdot CD\right). ◆$$

Задача 1. Средняя линия равнобочной трапеции, описанной около круга, равна 170. Определить радиус круга, если известно, что нижнее основание больше верхнего на 160.

Решение. □ Пусть $AD = a$ – нижнее основание трапеции, $BC = b$ – верхнее (см. рис. 38). В силу свойства средней линии трапеции $\frac{a+b}{2} = 170$. Кроме того, по условию $a - b = 160$. Получаем: $a = 250$, $b = 90$. По свойству трапеции, описанной около круга, имеем:

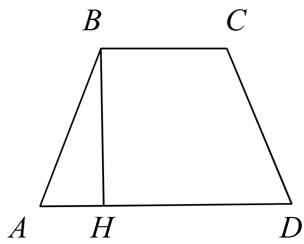


Рис. 38

$$AB + CD = AD + BC.$$

Так как трапеция равнобочная, то $AB = CD$, $2AB = 340$, $AB = 170$.

Проведем высоту трапеции BH. Тогда $BH = 2R$, $AH = \frac{a-b}{2} = 80$. По теореме Пифагора для треугольника ABH:

$BH^2 = AB^2 - AH^2$; $BH^2 = 170^2 - 80^2 = 225 \cdot 10^2$ или $BH = 150$.

Так как $BH = 2R$, то $R = 75$. ◆

Задача 2. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найти радиус этой окружности, если длины оснований трапеции равны a и b.

Решение: □ Пусть r – радиус окружности, вписанной в трапецию $ABCD$ (см. рис. 39). Так как трапеция прямоугольная, то $AB = 2r$. Так как трапеция описана около окружности, то $AB + CD = BC + AD$. Тогда

$$2r + CD = a + b \text{ и } CD = a + b - 2r .$$

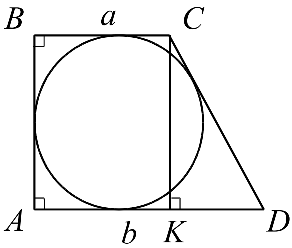


Рис. 39

Пусть $CK \perp AD$, тогда $CK = AB = 2r$ и $KD = b - a$.

По теореме Пифагора для треугольника CKD имеем:

$$CD^2 = CK^2 + KD^2 \text{ или } (a + b - 2r)^2 = 4r^2 + (a - b)^2 .$$

Отсюда находим

$$r = \frac{ab}{a+b} . ◆$$

Задача 3. В четырехугольнике $ABCD$ известны $\angle CBD = 58°$, $\angle ABD = 44°$ и $\angle ADC = 78°$. Найти $\angle CAD$.

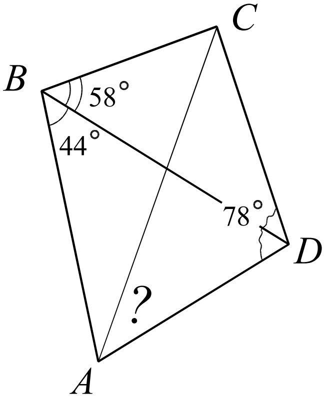


Рис. 40

Решение. Так как (см. рис. 40) $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 102°$ и $\angle ADC = 78°$, то $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Следовательно, существует окружность, описанная около $ABCD$. Тогда

$$\angle CAD = \angle CBD = 58°$$

как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. ◆

§ 5. Длина окружности. Площадь круга и его частей

Длина окружности – число, к которому стремится периметр правильного вписанного (или описанного) *n*-угольника при $n \to \infty$.

Формула длины окружности: $C = 2\pi R$, где R – радиус окружности, π – постоянная, не зависящая от окружности.

Число π иррациональное, оно выражается в виде бесконечной десятичной непериодической дроби следующим образом: $\pi = 3{,}14159...$.

Площадь круга – число, к которому стремится площадь правильного вписанного (или описанного) *n*-угольника при $n \to \infty$.

Формула площади круга: $S = \pi R^2$, где R – радиус.

Длина дуги: $l = R\alpha = \dfrac{\pi x}{180}R$, где R – радиус окружности, α – центральный угол в радианах, содержащий x градусов.

Формулы площади: сектора: $S = \dfrac{1}{2}R^2\alpha = \dfrac{\pi x}{360}R^2$;

сегмента: $S = \dfrac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$.

Площадь ***кольца***, образованного двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$), вычисляется как разность площадей этих кругов: $S = \pi(R_2^2 - R_1^2)$.

Задача 1. Радиус сектора равен R, а его площадь равна Q. Определить величину центрального угла.

Решение. Пусть величина центрального угла равна $x°$.

Из формулы для площади сектора и длины его дуги, получим

$$Q = \frac{1}{2}R \cdot \frac{\pi R x°}{180°}, \text{ откуда } x° = \frac{2Q}{\pi R^2} \cdot 180°. \blacklozenge$$

Задача 2. Найти площадь круга, если площадь вписанного в него квадрата равна Q.

Решение. □ Площадь квадрата выражается через диагональ формулой $Q = \dfrac{1}{2}d^2$. Тогда $d = \sqrt{2Q}$, но $2R = d = \sqrt{2Q}$. Следовательно, площадь круга $S = \pi R^2 = \dfrac{\pi Q}{2}$. ◆

Глава 5. Многоугольники

§ 1. Основные понятия

Многоугольник (n-угольник) – фигура, состоящая из замкнутой ломаной ($A_1 A_2 \dots A_n A_1$) без самопересечений и части плоскости, ограниченной этой ломаной.

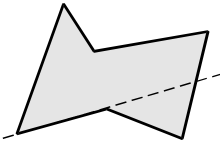


Рис. 1а

Многоугольник ***выпуклый***, если для каждой его стороны он расположен по одну сторону от прямой, проведенной через эту сторону.

На рисунках 1а и 1б изображены соответственно невыпуклый и выпуклый многоугольники.

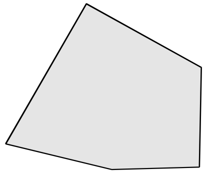


Рис. 1б

Два многоугольника называются ***равными***, если их можно совместить наложением.

Диагоналями многоугольника называются отрезки, соединяющие две вершины многоугольника, не принадлежащие одной его стороне. Число диагоналей N для любого *n*-угольника определяется по формуле

$$N = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Периметр многоугольника – сумма длин всех его сторон.

Теорема (о сумме углов многоугольника). ***Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна*** $180°(n-2)$***, или*** $\pi(n-2)$ ***радиан.***

Примечание. Утверждение верно и для невыпуклого многоугольника, если допускать углы, большие или равные $180°$.

Углы, смежные с внутренними углами многоугольника, называются его ***внешними*** углами, т.е. внешний угол многоугольника – это угол, образованный стороной многоугольника и продолжением соседней стороны.

Сумма внешних углов выпуклого *n*-угольника равна $360°$, или 2π радиан.

Многоугольник называется ***вписанным в окружность***, если все его вершины лежат на этой окружности. Такая окружность называется ***описанной*** около многоугольника.

Многоугольник называется ***описанным около окружности***, если все его стороны касаются этой окружности. Такая окружность называвается ***вписанной*** в многоугольник.

Не во всякий многоугольник можно вписать и вокруг него описать окружность.

Если биссектрисы всех углов многоугольника пересекаются в одной точке O, то в него можно вписать окружность. Точка O будет центром этой окружности. Радиус вписанной окружности выражается формулой:

$$r = \frac{2S}{P},$$

где S и P – соответственно площадь и периметр многоугольника.

Если перпендикуляры, восстановленные к серединам всех сторон многоугольника, пересекаются в одной точке O_1, то вокруг него можно описать окружность и ее центром будет точка O_1.

Задача 1. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике угол между биссектрисами двух прилежащих углов равен полусумме двух других углов.

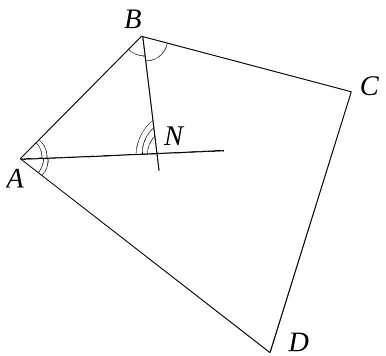


Рис. 2

Решение. □ Пусть биссектрисы углов A и B, прилежащих к стороне AB, пересекаются в точке N (см. рис. 2). Поскольку в четырехугольнике $ABCD$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°,$$

то в треугольнике ANB:

$$\angle ANB = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2} =$$

$$= 180° - \frac{360° - (\angle C + \angle D)}{2} =$$

$$= \frac{\angle C + \angle D}{2}$$, что и требовалось доказать. �

Задача 2. Могут ли длины сторон четырехугольника относиться как 5:7:11:25?

Решение. □ Четырехугольника с данным отношением сторон не существует, так как при любой единице измерения m получаем, что сумма трех его сторон $5m, 7m, 11m$ меньше четвертой стороны $25m$. Поэтому рассматриваемая ломаная линия, которой является четырехугольник, не может быть замкнутой. �

§ 2. Выпуклые четырехугольники

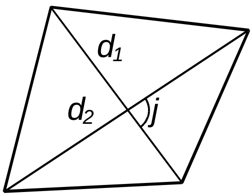


Рис. 3

Площадь любого четырехугольника выражается формулой

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi ,$$

где d_1 и d_2 – диагонали, а φ – угол между ними (см. рис. 3).

Приведем несколько полезных фактов (см. рис. 4).

1. Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами некоторого параллелограмма.

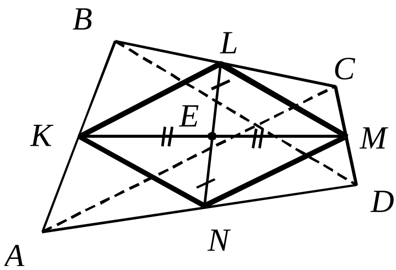


Рис. 4

2. Стороны этого параллелограмма параллельны соответствующим диагоналям четырехугольника.

3. Отрезки прямых, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, в точке своего пересечения делятся пополам.

4. Сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна удвоенной сумме квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

Задача 1. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{BK \cdot CE}{OF}$, где AD – сторона, BK, CE, OF – перпендикуляры, опущенные на нее из точек B, C и точки O пересечения диагоналей.

Решение. □ Треугольники CAD и OAD имеют одно и то же основание AD, а треугольники BAC и BAO – одну и ту же высоту, опущенную из вершины B (см. рис. 5). Отсюда щенную из вершины B (см. рис. 5). Отсюда

$$\frac{CE}{OF} = \frac{S_{\triangle CAD}}{S_{\triangle OAD}} = \frac{AC}{AO} = \frac{S_{\triangle BAC}}{S_{\triangle BAO}}$$

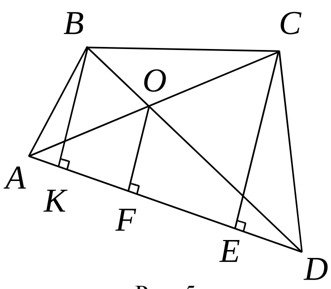


Рис. 5

(равенство $\frac{CE}{OF} = \frac{AC}{AO}$ следует из подобия треугольников ACE и AOF). Составив производную пропорцию, получим

$$\frac{S_{\triangle CAD} + S_{\triangle BAC}}{S_{\triangle OAD} + S_{\triangle BAO}} = \frac{CE}{OF},$$

т.е. $\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle DAB}} = \frac{CE}{OF}$. Тогда $S_{ABCD} = S_{\triangle DAB}\frac{CE}{OF} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{BK \cdot CE}{OF}$, что и требовалось доказать. �

Задача 2. Доказать, что во всяком четырехугольнике сумма квадратов диагоналей равна удвоенной сумме квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

Решение. □ Пусть N, K, L и M – середины сторон AD, AB, BC и CD произвольного четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 4). Четырехугольник $KLNM -$ параллелограмм. Проведем в нем диагонали KM и LN, являющиеся одновременно отрезками, соединяющими середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$. Поскольку KL – средняя линия в $\triangle ABC$, то $AC = 2\,KL$ и $AC^2 = 4\,KL^2$. (1)

Аналогично $BD^2 = 4\,KN^2$. (2)

Сложив по частям (1) и (2), получаем:

$$AC^2 + BD^2 = 4\ \ (KL^2 + KN^2).$$

Для параллелограмма $KLNM$ справедливо равенство (сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов сторон (см. теорему 7 стр. 106)). Поэтому:

$$AC^2 + BD^2 = 2\ \ (NL^2 + KM^2),$$

что и требовалось доказать. �

§ 3. Параллелограмм

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны друг другу.

Свойства параллелограмма:

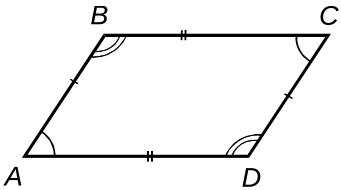


Рис. 6

(1) Противоположные углы параллелограмма равны друг другу: $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ (см. рис. 6).

(2) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна $180°$ ($\angle A + \angle B = 180°$ и т.д.) (см. рис. 6).

(3) Диагональ параллелограмма разбивает его на два равных треугольника: $\triangle ABC = \triangle CDA$, $\triangle ABD = \triangle BDC$ (см. рис. 7).

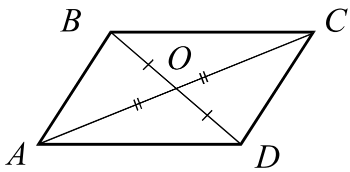


Рис. 7

(4) Противоположные стороны параллелограмма равны друг другу: $AB = CD, \quad AD = BC$ (см. рис. 7).

(5) Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам $AO = OC$, $BO = OD$ (см. рис. 7).

(6) Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

(7) **Теорема**. ***Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.***

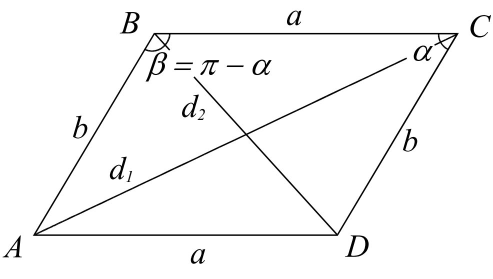


Рис. 8

Доказательство. □ Воспользуемся теоремой косинусов для треугольников BCD и ABC:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta.$$

Учитывая, что (см. рис. 8) $\angle ABC = \pi - \angle BCD$ и $\cos\beta = -\cos\alpha$, получаем $d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$.

Сложив квадраты длин диагоналей получим доказываемое равенство:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2. ■$$

Признаки параллелограмма.

Четырехугольник является параллелограммом в каждом из следующих случаев:

(1) если противоположные стороны равны друг другу ($AB = CD$, $AD = BC$);

(2) если какая-либо пара противоположных сторон представляет собой равные и параллельные отрезки ($AB = CD$, $AB \parallel CD$);

(3) если противоположные углы четырехугольника равны ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$);

(4) если диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам.

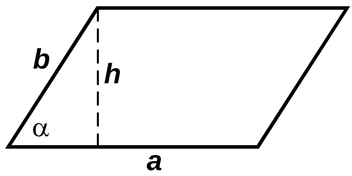


Рис. 9

Формулы площади параллелограмма:

$S = ah$, где a – основание, h – высота;

$S = ab\sin\alpha$, где a и b – стороны, α – угол между ними.

Задача 1. Построить параллелограмм по его сторонам и высоте.

Решение. □ Пусть даны стороны параллелограмма a, b и его высота h_a. На произвольной прямой l от произвольно взятой на ней точки A отложим отрезок $AD = a$. На расстоянии h_a от прямой l проведем

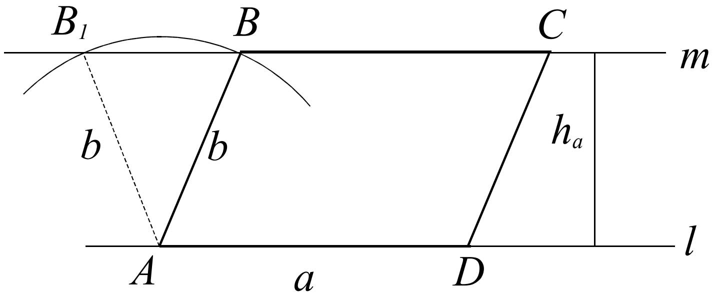


Рис. 10

прямую $m \parallel l$. Из точки A, как из центра, радиусом $AB = b$ проведем дугу до пересечения с прямой m. От точки B на прямой m отложим отрезок $BC = a$. Соединим точки A, B и точки D, C (см. рис. 10).

Фигура $ABCD$ – параллелограмм. Задача имеет два решения. Отметим, что в частном случае $h_a = b$ фигура $ABCD$ – прямоугольник, а при $a = b > h_a$ получим ромб. Если же $h_a > b$, то задача решений не имеет. �

Задача 2. Построить параллелограмм по его диагоналям d_1, d_2 и одной из сторон, например *a*.

Решение. (*1-й способ*). □ По трем сторонам $AD_1 = 2a,\ AC = d_1$,

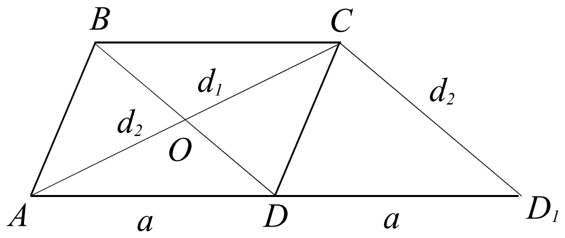


Рис. 11.

$CD_1 = d_2$ строим треугольник ACD_1 (см. рис. 11). Через середины отрезков AC и AD_1 – точки O и D проводим прямую и на ней отметим точку B такую, что $BO = OD$. Фигура $ABCD$ – искомый параллелограмм. �

(*2-й способ*) □ По трем сторонам $AB = a,\ AO = \frac{1}{2}d_1,\ BO = \frac{1}{2}d_2$ строим тре**у**гольник AOB, стороны которого AO и OB продолжим за точку O на отрезки, равные соответственно $OC = AO$ и $OD = BO$ (см. рис. 11). Последовательно соединяем точки A, B, C, D. Фигура $ABCD$ – искомый параллелограмм. Рисунок выполните самостоятельно. �

Задача 3. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ площадью 1 взята точка M так, что $BM : MC = 2:3$. Отрезок DM пересекает диагональ AC в точке K. Найти площадь треугольника AMK.

Решение. □ Найдем сначала площадь треугольника AMC (см. рис. 12). Так как $BM : MC = 2:3$, то и $S_{\vartriangle ABM} : S_{\vartriangle AMC} = 2:3$ и, поскольку

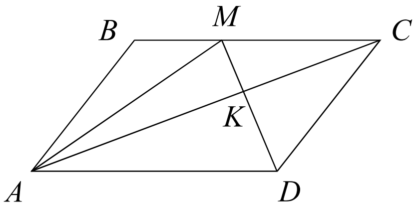


Рис. 12

$$S_{\vartriangle ABM} + S_{\vartriangle AMC} = S_{\vartriangle ABC} = 0{,}5,$$

то $S_{\vartriangle AMC} = 3S_{\vartriangle ABC}/5 = 0{,}3$.

Обозначим через $2a$ длину отрезка BM. Тогда $MC = 3a$ и $AD = BC = 5a$. Треугольники AKD и CKM подобны, и коэффициент подобия равен $AD : MC = 5a : 3a = 5/3$. Следовательно, $AK : KC = 5/3$. Отсюда $S_{\vartriangle AKM} : S_{\vartriangle KMC} = 5 : 3$. Тогда

$$S_{\vartriangle AKM} = \frac{5}{8} \cdot S_{\vartriangle AMC} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{16}. \ ■$$

Задача 4. В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

Решение. □ Прежде всего заметим, что $MNPQ$ – параллелограмм (см. рис. 13), поскольку биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны. Следовательно, нам достаточно найти стороны MN и MQ, и угол QMN.

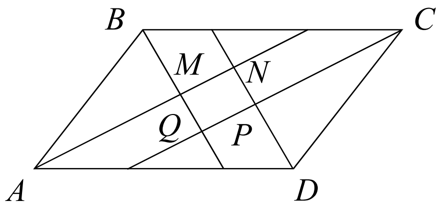


Рис. 13

Найдем угол QMN.

Отметим, что $\angle BAM = \alpha/2$, $\angle ABM = \angle ABC/2 = (180° - \alpha)/2$, и, наконец, $\angle AMB = \angle QMN = 180° - \angle BAM - \angle ABM = = 180° - \alpha/2 - (180° - \alpha)/2 = 90°$, т.е. $MNPQ$ – прямоугольник.

Для определения сторон MN и MQ находим последовательно $BQ = a\sin(\alpha/2)$ (из прямоугольного $\vartriangle BCQ$), $BM = b\sin(\alpha/2)$ и $AM = b\cos(\alpha/2)$ (из прямоугольного $\vartriangle BMA$), $AN = a\cos(\alpha/2)$ (из прямоугольного $\vartriangle NAD$).

Тогда $MQ = BQ - BM = (a-b)\sin(\alpha/2)$.

Аналогично находим $MN = AN - AM = (a-b)\cos(\alpha/2)$.

Следовательно, $S = \dfrac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha$. ■

§ 3. Ромб. Прямоугольник. Квадрат

Ромб

Ромб – четырехугольник, у которого все стороны равны. Ромб – частный случай параллелограмма.

Свойства ромба:

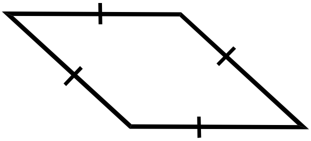


Рис. 14

(1) Диагонали ромба перпендикулярны друг другу.

(2) Диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов.

(3) Диагонали ромба являются его осями симметрии.

(4) В ромб можно вписать окружность.

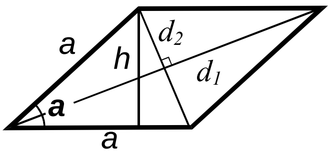


Рис. 15

Формулы площади ромба:

$$S = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 = ah.$$

Задача. Периметр ромба равен $2p$, сумма диагоналей равна m. Найти площадь ромба.

Решение. □ Пусть диагонали ромба равны x и y. Тогда для определения площади ромба достаточно найти произведение xy. Сторона ромба равна $\frac{p}{4}$. Используя теорему Пифагора, получим

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

С учетом условия задачи ($x + y = m$), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = m, \\ x^2 + y^2 = p^2. \end{cases}$$

Возводя обе части первого уравнения системы в квадрат и вычитая из них соответствующие части второго, получим $xy = \frac{m^2 - p^2}{2}$. Тогда $S = \frac{1}{2} xy = \frac{m^2 - p^2}{4}$. ■

Прямоугольник

Прямоугольник – четырехугольник, у которого все углы прямые. Прямоугольник – частный случай параллелограмма.

Свойства прямоугольника:

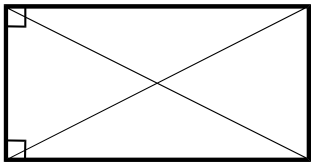


Рис. 16

(1) Диагонали прямоугольника равны друг другу.

(2) Серединные перпендикуляры к сторонам прямоугольника являются его осями симметрии.

(3) Около прямоугольника всегда можно описать окружность.

Формула площади прямоугольника: $S = ab$, где a и b – стороны.

Квадрат

Квадрат – четырехугольник, у которого все стороны и все углы равны друг другу (т.е. квадрат – это правильный четырехугольник).

Квадрат – четырехугольник, который одновременно является прямоугольником и ромбом, поэтому он обладает всеми их свойствами.

Квадрат имеет четыре оси симметрии: две диагонали и два серединных перпендикуляра к сторонам.

Формулы площади квадрата: $S = a^2 = \dfrac{d^2}{2}$, где a, d – соответственно сторона и диагональ квадрата.

Длины диагонали и стороны квадрата связаны формулой $d = a\sqrt{2}$.

Задача 1. В квадрат $ABCD$ вписан другой квадрат $KLMN$, так что вершины его лежат на сторонах первого квадрата, а стороны составляют со сторонами первого квадрата углы по $30°$. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного?

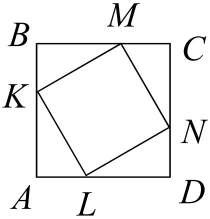


Рис. 17

Решение. □ Пусть сторона квадрата равна a. Отметим, что (см. рис. 17)

$$\triangle AKL = \triangle LND = \triangle MNC = \triangle KBM$$

(по равным гипотенузам и острым углам), поэтому $AK = LD = NC = BM$ и $AL = BK = MC = ND$.

Но $AL = \dfrac{KL}{2}$, $AK = \dfrac{KL\sqrt{3}}{2}$ и

$$AB = AK + KB = \frac{KL\sqrt{3}}{2} + AL = \frac{KL\sqrt{3}}{2} + \frac{KL}{2} = \frac{KL(1+\sqrt{3})}{2}.$$

Следовательно $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \left(\dfrac{AB}{KL}\right)^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$. �

Задача 2. На сторонах AB, BC и AD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M, N и K. Причем точка M – середина стороны AB, $2BN = NC$ и $2DK = KA$. Найти синус угла между прямыми MC и NK.

Решение. □ Пусть сторона квадрата равна a. Тогда (см. рис. 18) $AM = MB = \dfrac{a}{2}$, $BN = \dfrac{a}{3}$, $NC = \dfrac{2a}{3}$, $KD = \dfrac{a}{3}$ и $AK = \dfrac{2a}{3}$.

Площади прямоугольных треугольников

$$S_{\vartriangle MBN} = \frac{a^2}{12},\ S_{\vartriangle AMK} = S_{\vartriangle CKD} = \frac{a^2}{6}.$$

$$\begin{aligned} S_{MNCK} &= S_{ABCD} - (S_{\vartriangle AMK} + S_{\vartriangle CKD} + S_{\vartriangle MBN}) = \\ &= a^2 - \frac{5a^2}{12} = \frac{7a^2}{12}. \end{aligned} \quad (1)$$

O – точка пересечения диагоналей MC и NK четырехугольника $MNCK$. Его площадь можно вычислить по формуле

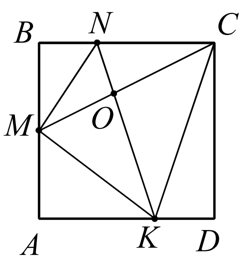


Рис. 18

$$S_{MNCK} = \frac{1}{2} MC \cdot NK \sin\angle MOK. \quad (2)$$

Найдем длины диагоналей четырехугольника $MNCK$

$$MC = \sqrt{BM^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

$$NK = \sqrt{(AK - BN)^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Подставляя полученные значения в (2) и приравнивая к значению площади в (1), получим: $\frac{5\sqrt{2}a^2}{12}\sin\angle MOK = \frac{7a^2}{12}$, откуда

$$\sin\angle MOK = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$ ◆

Задача 3. В ромб с острым углом $30°$ вписан круг, а в круг – квадрат. Найти отношение площади ромба к площади квадрата.

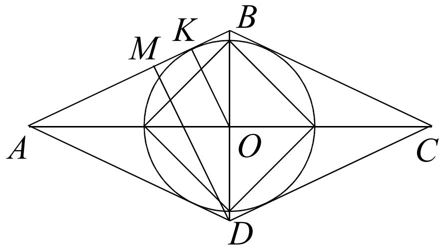


Рис. 19

Решение. □ Центр вписанной в ромб окружности лежит в точке пересечения его диагоналей. Пусть радиус окружности $OK = R$ (см. рис. 19). Диагональ квадрата, вписанного в окружность, будет $2R$, а значит его площадь равна $S_{кв.} = 2R^2$.

Из подобия треугольников KBO и MDB следует, что высота ромба $DM = 2R$. В прямоугольном треугольнике AMD катет $MD = \frac{AD}{2}$, как катет, лежащий против угла $30°$. Следовательно, $AD = 4R$ и площадь ромба $S_{ромба} = AD \cdot MD = 8R^2$.

Тогда искомое отношение $\frac{S_{ромба}}{S_{кв.}} = \frac{8R^2}{2R^2} = 4$. ◆

Задача 4. Вписанные в окружность радиуса *R* квадрат и равносторонний треугольник имеют общую вершину. Найти площадь фигуры, точки которой принадлежат одновременно квадрату и треугольнику.

Решение. □ Пусть $ABCD$ – квадрат со стороной *a* (см. рис. 20), EBF – равносторонний треугольник со стороной *b*. Тогда $a = R\sqrt{2}$, $b = R\sqrt{3}$. Положение точек L, K, Q, N, M указано на рисунке.

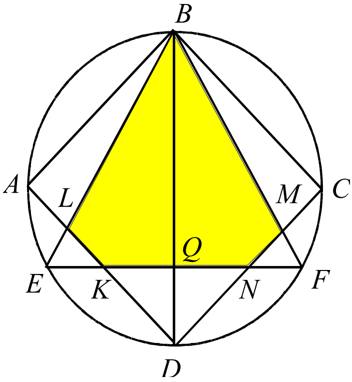


Рис. 20

Найдем площадь $\triangle ELK$. Поскольку BQ – высота $\triangle EBF$, то $BQ = b\sin 60^\circ = 1{,}5R$. Тогда

$$QD = BD - BQ = 2R - 1{,}5R = 0{,}5R.$$

Рассмотрим теперь $\triangle KQD$: $\angle QDK = 45^\circ$, $\angle KQD = 90^\circ$, и, значит, $\angle QKD = 45^\circ$. Следовательно, $\triangle KQD$ – равнобедренный и $KQ = QD = 0{,}5R$. Тогда

$$EK = EQ - KQ = \frac{R\sqrt{3}}{2} - 0{,}5R =$$

$$= \frac{R}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Рассмотрим $\triangle ELK$: $\angle LKE = 45^\circ$, $\angle LEK = 60^\circ$, так что $\angle ELK = 75^\circ$. Применим к $\triangle ELK$ теорему синусов: $\dfrac{EK}{\sin\angle L} = \dfrac{LK}{\sin\angle E}$.

Или $\dfrac{EK}{\sin 75^\circ} = \dfrac{LK}{\sin 60^\circ}$. Откуда: $LK = \dfrac{EK}{\sin 75^\circ}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Но $\sin 75^\circ = $ $= \sin\left(30^\circ + 45^\circ\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$. После упрощений получим: $LK = \dfrac{R\sqrt{6}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$. Тогда $S_{\triangle ELK} = \dfrac{1}{2}\cdot LK\cdot EK\cdot\sin 45^\circ =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{6}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}\cdot\frac{R\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2\left(9-5\sqrt{3}\right)}{8}.$$

Площадь фигуры, точки которой принадлежат одновременно квадрату и треугольнику, найдем следующим образом:

$$S = S_{\triangle EBF} - \left(S_{\triangle ELK} + S_{\triangle NMF}\right).$$

Но $\triangle ELK$ и $\triangle NMF$ равны.

$$S = S_{\triangle EBF} - 2S_{\triangle ELK} = \frac{1}{2}\cdot 3R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{R^2\left(9-5\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{R^2}{4}\cdot\left(8\sqrt{3}-9\right).$$ ◆

§ 5. Трапеция

Основные определения, формулы и свойства трапеции

Трапеция – выпуклый четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны называются соответственно ***верхним*** и ***нижним основанием***, а непараллельные – ***боковыми сторонами***.

Примечание: иногда требование, чтобы две стороны были не параллельны, опускают и считают параллелограмм частным случаем трапеции.

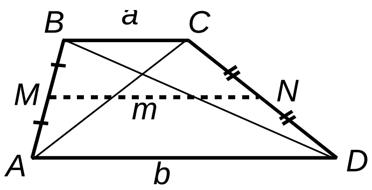


Рис. 21

Отрезки, соединяющие противоположные вершины называются ***диагоналями трапеции***.

Отрезок прямой, соединяющий середины непараллельных сторон трапеции называется ***средней линией трапеции***.

Теорема о средней линии. ***Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна полусумме оснований:***

$$MN \parallel AD,\ m = \frac{a+b}{2}.$$

Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание.

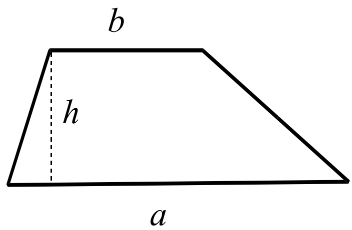


Рис. 22

Площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h выражается формулой

$$S = \frac{a+b}{2} h,$$

т.е. площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.

Трапеция ***равнобочная*** (или ***равнобокая***, или ***равнобедренная***), если ее боковые стороны равны друг другу.

Трапеция ***прямоугольная***, если один из ее углов – прямой.

Свойства равнобочной трапеции:

(1) Углы при основании равнобочной трапеции равны между собой.

(2) Диагонали равнобочной трапеции равны.

Примечание: для двух последних утверждений верны утверждения, обратные к ним.

Трапеция может быть вписана в окружность в том и только том случае, когда она равнобочная.

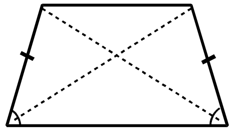


Рис. 23

Свойства произвольной трапеции:

(1) Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника, причем треугольники, прилежащие к основаниям, подобны друг другу, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики, т.е. имеют равные площади (см. рис. 24):

$$\triangle BOC \sim \triangle DOA\,,\ S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OCD}\,.$$

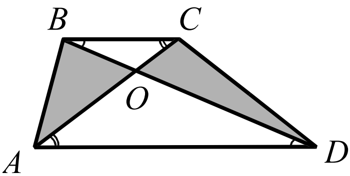


Рис. 24

(2) В любой трапеции следующие четыре точки лежат на одной прямой: середины оснований, точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон (см. рис. 25).

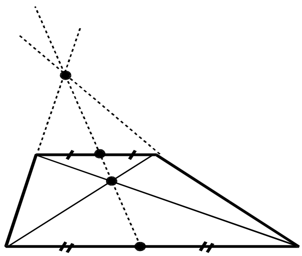


Рис. 25

(3) Отрезок, параллельный основаниям трапеции, проходящий через точку пересечения диагоналей и соединяющий две точки на боковых сторонах, делится точкой пересечения диагоналей пополам: Его длина есть среднее гармоническое оснований трапеции:

$$MN = \frac{2ab}{a+b}.$$

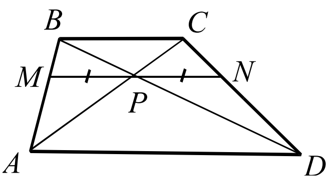


Рис. 26

Задача 1. Средняя линия трапеции, равная 10 *см*, делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найти длины оснований трапеции.

Решение. □ Средняя линия делит трапецию $ABCD$ на две трапеции $MBCN$ и $AMND$, площади которых равны (см. рис. 27):

$$S_{MBCN}=\frac{MN+BC}{2}\cdot\frac{h}{2}=S_1,\ S_{AMND}=\frac{MN+AD}{2}\cdot\frac{h}{2}=S_2,$$

где $h-$ высота трапеции $ABCD$. По условию задачи $\frac{S_1}{S_2}=\frac{MN+BC}{MN+AD}=\frac{3}{5}$. Следовательно,

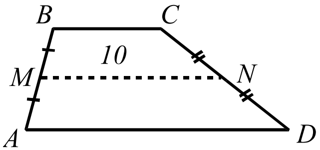


Рис. 27

$$\begin{cases}\dfrac{10+BC}{10+AD}=\dfrac{3}{5},\\[2mm] \dfrac{AD+BC}{2}=10.\end{cases}$$

Откуда находим $BC=5\,см,\ AD=15\,см$. ■

Задача 2. В трапеции длины оснований равны 5 и 15 *см*, а длины диагоналей – 12 и 16 *см*. Найти площадь трапеции.

Решение. (*1-й способ*). □ Пусть $AC=12\,см,\quad BD=16\,см$ (см. рис 28). Найдем площадь трапеции по формуле $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle BPC$. Из подобия треугольников BPC и APD следует $\frac{AP}{PC}=\frac{PD}{BP}=\frac{AD}{BC}=\frac{15}{5}=3$. Отсюда $AP=9\,см,\ PC=3\,см,\ BP=4\,см,\ PD=12\,см$. В треугольнике BPC стороны равны 3, 4 и 5 *см*. Следовательно, этот треугольник прямоугольный, $\angle BPC=90°$ и $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=96\ (см^2)$. ■

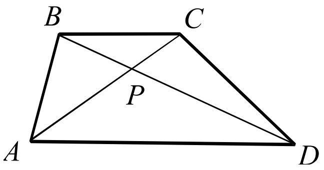


Рис. 28

(*2-й способ*). □ Проведем высоты BK и CL (см. рис. 29). Площадь трапеции можно найти используя формулу $S=\frac{BC+AD}{2}\cdot BK.$

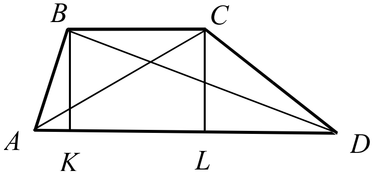


Рис. 29

Найдем BK. Четырехугольник

$KBCL-$ прямоугольник, поэтому $KL = BC = 5$ *см*. Треугольники BKD и $ACL-$ прямоугольные. Из теоремы Пифагора для них получим:

$$BK^2 = BD^2 - KD^2 = BD^2 - (AD - AK)^2 = 16^2 - (15 - AK)^2,$$

$$CL^2 = AC^2 - AL^2 = AC^2 - (AK + KL)^2 = 12^2 - (5 + AK)^2.$$

Из равенства $CL = BK$ следует уравнение

$$16^2 - (15 - AK)^2 = 12^2 - (5 + AK)^2.$$

Откуда $AK = 2{,}2$ *см* и $BK = \sqrt{16^2 - 12{,}8^2} = 9{,}6$ *см* и

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BK = 96\,(см^2). ◆$$

Задача 3. Основания трапеции равны a и b. Найти длину отрезка, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам.

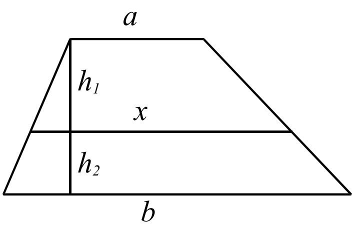


Рис. 30

Решение. □ Пусть площадь трапеции равна S, h_1 и h_2- части высоты, а $x-$ длина искомого отрезка (см. рис. 30). Тогда

$$\frac{S}{2} = \frac{a+x}{2} h_1 = \frac{b+x}{2} h_2 \text{ и}$$

$$S = \frac{a+b}{2}(h_1 + h_2).$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a+x)\,h_1 = (b+x)\,h_2, \\ (a+x)\,h_1 = \dfrac{b+a}{2}(h_1 + h_2). \end{cases}$$

Из первого уравнения системы $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{a+x}{b+x}$. Подставляя во второе уравнение, получим: $a + x = \dfrac{1}{2}(a+b)\left(1 + \dfrac{a+x}{b+x}\right)$. Из этого уравнения следует $x = \sqrt{\dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)}$. ◆

Задача 4. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) O – точка пересечения диагоналей. Известно, что площади треугольников OBC и OAD равны соответственно S_1 и S_2. Найти площадь трапеции.

Решение. (*1 способ*) □ Заметим, что $S_{\vartriangle ABO} = S_{\vartriangle DOC}$ (см. рис. 31) (докажите самостоятельно). Отсюда

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2S_{\vartriangle DOC}.$$

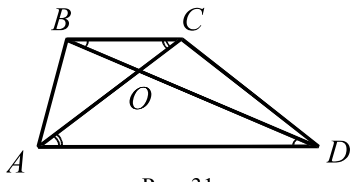


Рис. 31

Из подобия треугольников BOC и AOD (докажите самостоятельно) следует, что

$$\frac{BO}{DO} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}.$$

Треугольники BOC и COD имеют общую высоту, если принять за их основания отрезки BO и OD. Следовательно,

$$\frac{S_1}{S_{\vartriangle COD}} = \frac{BO}{DO} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$$

и значит $S_{\vartriangle COD} = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$. Тогда

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2. ◆$$

(*2 способ*). Пусть $\angle BOC = \alpha$, тогда

$$S_1 = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\alpha, \quad S_2 = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin\alpha.$$

Перемножая эти равенства и пользуясь, тем, что $S_{\vartriangle ABO} = S_{\vartriangle DOC}$ и $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, получим $S^2_{\vartriangle COD} = S_1 \cdot S_2$. Тогда

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2. ◆$$

§ 6. Правильные многоугольники

Правильный многоугольник – многоугольник, у которого все стороны и все углы одинаковы.

Его внутренние углы равны $\dfrac{180°(n-2)}{n}$ или $\dfrac{\pi(n-2)}{n}$ радиан.

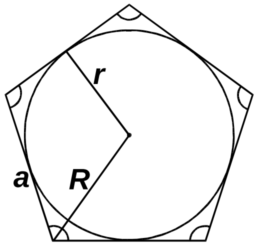


Рис. 32

Теорема. ***В правильный многоугольник всегда можно вписать окружность. Около правильного многоугольника всегда можно описать окружность.***

Эти окружности имеют один и тот же центр. Его называют ***центром многоугольника***.

Угол под которым видна сторона правильного многоугольника из его центра, называется ***центральным углом*** многоугольника.

Пусть a – длина стороны правильного n-угольника, S_n – его площадь, r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей. Связь между этими величинами приведена в таблице:

n	R	r	S_n
3	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$
4	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{a}{2}$	a^2
6	a	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{3a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$
n	$\dfrac{a}{2\sin(\pi/n)}$	$\dfrac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$	$\dfrac{n}{4}\cdot a^2\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{1}{2}P_n r$

Другие свойства правильных многоугольников:

(1) Любые два правильных n-угольника подобны друг другу. В частности, если у них стороны равны, то n-угольника также равны.

(2) Диагонали правильного шестиугольника, проходящие через его центр, разбивают его на шесть правильных треугольников.

(3) Сумма расстояний от любой точки внутри правильного многоугольника до его сторон (или их продолжений) не зависит от положения точки: $h_1+h_2+\ldots+h_n=const$.

Теорема Паскаля. ***Если шестиугольник вписан в окружность и противоположные его стороны не параллельны, то точки пересечения продолжений этих сторон лежат на одной прямой.***

Теорема Брианшона. ***Если шестиугольник описан около окружности, то прямые, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.***

Сторона b_n правильного описанного многоугольника выражается через сторону a_n правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон и радиус R окружности по формуле

$$b_n = \frac{2Ra_n}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

Задача 1. В окружность радиуса $\left(3+\sqrt{3}\right)$ *см* вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти радиус круга, вписанного в треугольник ACD.

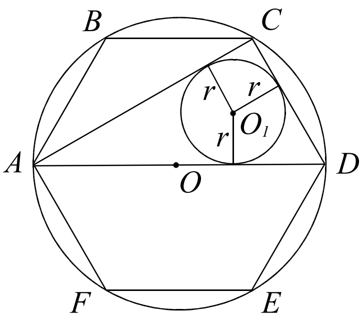


Рис. 33

Решение. □ Пусть R – радиус описанной окружности. Так как AD – диаметр, то $\angle ACD = 90^\circ$, и для определения радиуса r вписанного в $\triangle ACD$ круга можно воспользоваться формулами для вычисления площади $\triangle ACD$ двумя различными способами:

$$S = p \cdot r = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot AC.$$

Здесь p – полупериметр $\triangle ACD$. Так как $DC = R$, $AD = 2R$, $AC = R\sqrt{3}$. Тогда $p = 0{,}5(DC + AD + AC) = 0{,}5R(3+\sqrt{3})$. Следовательно, $\frac{1}{2}R\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot r = \frac{1}{2}R\cdot\sqrt{3}R$. Откуда $r = \frac{R}{\sqrt{3}+1}$. Подставляя значение $R = 3+\sqrt{3}$, находим $r = \sqrt{3}$ *см*. ◆

Глава 6. Элементы аналитической геометрии

§ 1. Векторная алгебра

Знание векторной алгебры составляет один из необходимых компонентов полноценного математического образования. Без векторов трудно себе представить физику. С их помощью можно решать многие задачи элементарной геометрии, доказывать теоремы, составлять уравнения прямых, плоскостей и т.д.

Вектором называется параллельный перенос. Геометрический вектор на плоскости (пространстве) – множество всевозможных направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление. Направленный отрезок определяется упорядоченной парой точек, т.е. заданием точки и ее образа. Вектор $\vec{a}$, определяемый упорядоченной парой (A, B) несовпадающих точек, изображается ***направленным отрезком*** (стрелкой) с началом с точке A и концом в точке B (см. рис. 1). Вектор $\vec{a}$ обозначается также $\overrightarrow{AB}$ и пишется $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. По определению вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ отображает каждую точку M на такую точку N, что луч $[MN)$ сонаправлен с лучем $[AB)$ и $MN = AB$.

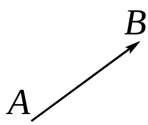


Рис. 1

Расстояние AB называется ***длиной*** или ***модулем*** вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$). Направление луча $[AB)$ называется ***направлением*** вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Построение направленного отрезка MN такого, что $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$, называется ***откладыванием*** вектора $\vec{a}$ от точки M. От любой точки плоскости (пространства) можно отложить вектор равный данному.

Параллельный перенос на нулевое расстояние называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$.

Сложение векторов и умножение на число

Для любых двух векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ определена ***сумма*** векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и ***произведение*** $\lambda\vec{a}$, где λ – действительное число.

Сумма ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ находится по ***правилу треугольника*** (от произвольной точки O откладывается вектор $\vec{a}=\vec{OA}$, от его конца откладывается вектор $\vec{b}=\vec{AB}$, тогда $\vec{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ (см. рис. 2а)) или ***правилу параллелограмма*** (сумма векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ есть вектор, изображаемый диагональю параллелограмма, построенного на направленных отрезках, изображающих данные вектора и имеющих общее начало (см. рис. 2б)).

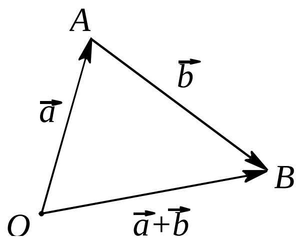


Рис. 2а

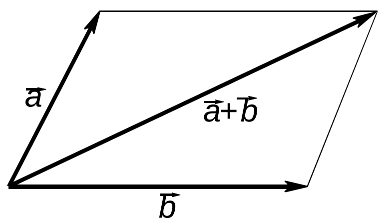


Рис. 2б

Произведением ненулевого ***вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** $\lambda\neq 0$ (обозначается $\lambda\vec{a}$) называется вектор, длина которого равна $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, и который сонаправлен вектору $\vec{a}$ при $\lambda>0$ и противоположно направлен при $\lambda<0$ (см. рис. 3).

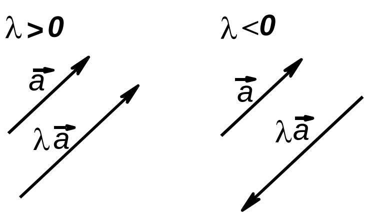


Рис. 3

Введенные операции обладают следующими свойствами:

а) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; б) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$;

в) существует нулевой вектор $\vec{0}$ такой, что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для всех $\vec{a}$;

г) для любого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор $\vec{b}=-\vec{a}$ такой, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$;

д) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$; е) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

ж) $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 4) определяется так:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

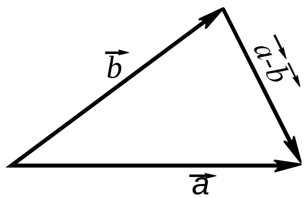


Рис. 4

Имеет место следующее правило для любых точек M, N, P плоскости, называемое ***правилом трех точек:***

$$\vec{MN}+\vec{NP}=\vec{MP}.$$

Коллинеарность и компланарность векторов

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными*** (обозначается $\vec{a}\parallel\vec{b}$), если они параллельны одной прямой. Коллинеарность векторов записывается алгебраически следующим образом: $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ или $\vec{b}=\mu\vec{a}$. Алгебраическое условие коллинеарности векторов распространяется и на случай, когда один или оба вектора равны $\vec{0}$.

Теорема 1. ***Точка C принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ коллинеарны*** (т.е. существует такое действительное число k, что $\vec{AC} = k\vec{AB}$).

Следовательно, для того, чтобы установить, что три точки A, B, C принадлежат одной прямой, достаточно убедиться, что существует такое число k, что $\vec{AC} = k\vec{AB}$. Число k в последнем равенстве (при $A \neq B$) имеет следующий геометрический смысл: $|k| = \dfrac{|\vec{AC}|}{|\vec{AB}|}$.

Теорема 2. ***Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы плоскости, то любой вектор $\vec{v}$ этой плоскости единственным образом представляется в виде $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где $x, y \in \mathbb{R}$.***

Полезное соотношение. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что $AD : DC = m : n$. Тогда

$$\vec{BD} = \frac{n}{m+n}\vec{BA} + \frac{m}{m+n}\vec{BC}.$$

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются ***компланарными,*** если они параллельны одной плоскости. Алгебраически этот факт означает, что какой-нибудь из них выражается через другие; например, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Любой вектор плоскости можно выразить через два неколлинеарных вектора этой плоскости.

Координаты векторов. Действия над векторами в координатной форме

Если зафиксировать на плоскости точку O (начало координат) и провести через нее две взаимно перпендикулярные оси (оси координат), то получится прямоугольная система координат. Ось Ox – ось ***абсцисс***, ось Oy – ось ***ординат***. Единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$, направленные по осям координат, – ***орты***. Каждый вектор $\vec{v}$ плоскости единственным образом представляется в виде $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где x и y – некоторые действительные числа. Обозначается: $\vec{v} = (x, y)$. Числа x и y – соответственно ***абсцисса*** и ***ордината*** вектора $\vec{v}$. Абсцисса и ордината – ***координаты***.

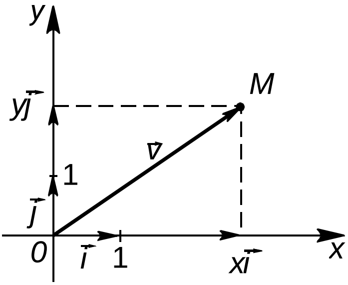


Рис. 5

Примечание: используется также обозначение $\vec{v} = \{x; y\}$.

Если M – точка плоскости, то $\vec{OM}$ – ее радиус-вектор. Координаты точки M те же, что и ее радиус-вектора. Если $\vec{OM} = \{x; y\}$, то $M(x; y)$.

Если вектор задан координатами начала $M(x_M; y_M)$ и конца $N(x_N; y_N)$, то $\vec{MN} = \{x_N - x_M; y_N - y_M\}$.

Выражение операций с векторами в координатной форме: если $\vec{a} = \{a_1; a_2\}$, $\vec{b} = \{b_1; b_2\}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2\} \text{ и } \lambda\vec{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2\}.$$

Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a} = \{a_1; a_2\}$ и $\vec{b} = \{b_1; b_2\}$ имеет вид: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$.

Примеры решения задач

Задача 1. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AF}=\vec{b}$. Выразить вектор $\vec{AC}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$.

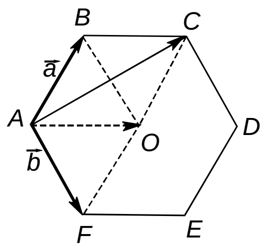


Рис. 6

Решение. □ Пусть $O-$ центр шестиугольника (см. рис. 6). Четырехугольники $ABCO$ и $ABOF$ – параллелограммы. Тогда

$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{a}+\vec{AO}=\vec{a}+\vec{AO}=$$
$$=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}.$$ ◆

Задача 2. Стороны OA, OB треугольника OAB разделены точками M и N соответственно так, что $OM:MA=2, ON:NB=4$. Выразить через $\vec{a}=\vec{OA}$ и $\vec{b}=\vec{OB}$ вектор $\vec{OP}$, где P – точка пересечения отрезков AN и BM (см. рис. 7).

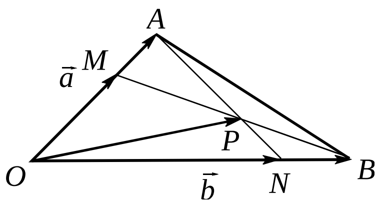


Рис. 7

Решение: □ Используя правило трех точек, запишем $\vec{OP}=\vec{OA}+\vec{AP}$. Или

$$\vec{OP}=\vec{a}+\lambda\cdot\vec{AN}=\vec{a}+\lambda(\vec{AO}+\vec{ON})=$$
$$=\vec{a}+\lambda\left(-\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}\right)=(1-\lambda)\vec{a}+\frac{4}{5}\lambda\vec{b}.$$

Выражая $\vec{OP}$ «через точку B», получим $\vec{OP}=\vec{OB}+\vec{BP}=\vec{b}+\mu\cdot\vec{BM}=\frac{2}{3}\mu\vec{a}+(1-\mu)\vec{b}$. Из единственности разложения вектора $\vec{OP}$ через два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что $1-\lambda=\frac{2}{3}\mu,\ \ \frac{4}{5}\lambda=1-\mu$. Решая эту систему, найдем $\lambda=\frac{5}{7}$. Следовательно, $\vec{BP}=\left(1-\frac{5}{7}\right)\vec{a}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\vec{b}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$. ◆

Задача 3. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N середины сторон BC и CD соответственно. Выразить вектор $\vec{AB}$ через векторы $\vec{a} = \vec{AM}$, $\vec{b} = \vec{AN}$ (см. рис. 8).

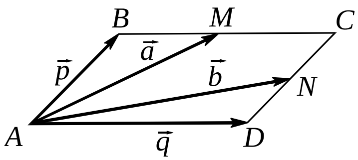


Рис. 8

Решение. □ Обозначим векторы $\vec{p} = \vec{AB}$ и $\vec{q} = \vec{AD}$, а требуется найти векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Действительно,

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}, \quad \vec{AN} = \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{p}.$$

Следовательно, $\vec{a} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{p}$.

Рассматривая теперь эти равенства как систему уравнений относительно $\vec{p}$ и $\vec{q}$, получим: $\vec{p} = \frac{1}{3}(4\vec{a} - 2\vec{b})$. ◆

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение $\vec{a}\,\vec{b}$ ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется формулой $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.

Если хотя бы один из них равен $\vec{0}$, то все произведение равно $\vec{0}$, т.е. $\vec{a}\,\vec{0} = \vec{0}\,\vec{a} = \vec{0}\,\vec{0} = \vec{0}$.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$.

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами: а) $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$; б) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$; в) $\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$.

Эти равенства показывают, что свойства векторов аналогичны свойствам чисел, в векторных выражениях можно использовать скобки, приводить подобные члены и т.д. Однако не все алгебраические свойства чисел переносятся на векторы, и игнорирование этого может привести к ошибкам. Так, например, для векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в общем случае $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) \neq (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$; далее, если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, то это не значит, что $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$ и $\vec{b} = \{b_1, b_2\}$, заданных своими координатами в прямоугольной системе координат, вычисляется следующим образом: $\vec{a}\,\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

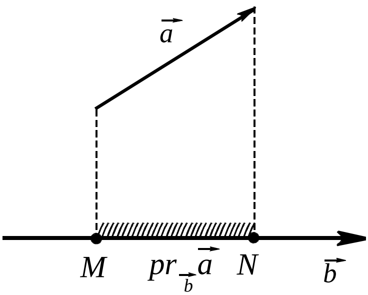


Рис. 9

Обозначим через $pr_{\vec{b}}\,\vec{a}$ проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ (проекция – это число, равное длине отрезка MN , если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют острый угол, и равное $-MN$, если угол тупой) (см. рис. 9).

С помощью скалярного произведения векторов можно находить длины векторов, проекции вектора на вектор, углы между векторами.

Справедливы формулы: (1) $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a})^2}$;

(2) $pr_{\vec{b}}\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$; (3) $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Задача 4. Пусть $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Найти:

1) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$; 2) $pr_{\vec{a}-\vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$; 3) $\cos\angle(\vec{a}, (\vec{a} + \vec{b}))$.

Решение. □ 1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 2\cdot 3\cdot(-0{,}5) = -3$.

Далее, $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + 2\vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2} = 2\cdot\sqrt{7}$;

2) $pr_{\vec{a}-\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{\sqrt{(\vec{a})^2-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{b})^2}}=-\dfrac{5}{\sqrt{19}}$;

3) $\cos\angle(\vec{a},(\vec{a}+\vec{b}))=\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$. ■

Теорема 4. ***Пусть точка C лежит на прямой AB, точка O не лежит на этой прямой и имеет место равенство $\vec{OC}=\alpha\vec{OA}+\beta\vec{OB}$. Тогда $\alpha+\beta=1$.***

Задача 5. Точки K, L, M взяты на сторонах AC, BC и AB треугольника ABC так, что $\dfrac{AK}{KC}=\dfrac{CL}{LB}=\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{1}{2}$, $N-$ середина стороны AC. Найти отношение, в котором точка пересечения отрезков KL и MN делит отрезок KL.

Решение. □ Пусть O точка пересечения отрезков KL и MN (см. рис. 10) и $\dfrac{KO}{KL}=x$. Тогда $\vec{KO}=x\vec{KL}$. Учитывая, что точка $L-$ середина MC, а $KN=\dfrac{1}{4}KC$, получаем

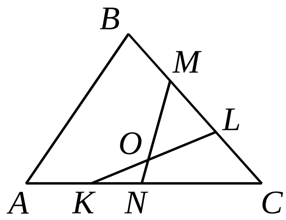


Рис. 10

$$\vec{KO}=x\vec{KL}=\frac{x}{2}(\vec{KM}+\vec{KC})=\frac{x}{2}(\vec{KM}+4\vec{KN})=\frac{x}{2}\vec{KM}+2x\vec{KN}.$$

Так как точка O лежит на прямой MN, то $0,5x+2x=1$, т.е. $x=\dfrac{2}{5}$ и $\dfrac{KO}{OL}=\dfrac{2}{3}$. ■

Задача 7. Пусть $A(1;\ 2)$, $B(-1;\ 0)$, $C(1;\ 1)$ – точки пространства. Найти: 1) косинус угла A треугольника ABC; 2) площадь этого треугольника; 3) $pr_{\vec{AB}}\vec{AM}$, где AM – медиана треугольника.

Решение. □ 1) $\cos(\angle B) = \cos\angle(\vec{BA}, \vec{BC}) = \dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|}$. Вычислим координаты векторов $\vec{BA}, \vec{BC}$: $\vec{BA} = \{1-(-1); 2-0\} = \{2;2\}$, $\vec{BC} = \{2;1\}$. Длины векторов $|\vec{BA}| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$, $|\vec{BC}| = \sqrt{5}$. Следовательно, $\cos(\angle B) = \dfrac{3}{5\sqrt{2}}$.

2) $\sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} = \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5\sqrt{2}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{41}}{5\sqrt{2}}$. Тогда

$$S_{\vartriangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|\cdot\sin\angle B = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{41}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{205}}{5}.$$

3) $\vec{AM} = \dfrac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC}) = \dfrac{1}{2}(\{-2;-2\}+\{0;-1\}) = \{-1;-1,5\}$.

Тогда $pr_{\vec{AB}}\vec{AM} = \dfrac{\vec{AM}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \dfrac{2+3}{\sqrt{4+4}} = \dfrac{5}{\sqrt{8}}$. ■

Задача 7. Найти угол между равными медианами равнобедренного прямоугольного треугольника.

Решение. □ Введем систему координат с началом в точке A и осями, направленными вдоль катетов AC и AB. Пусть длины катетов равны 1. Тогда $C(1;0)$, $B(0;1)$, $M\left(0;0,5\right)$, $N\left(0,5;0\right)$

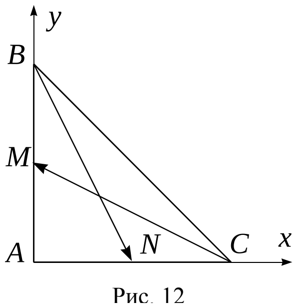


Рис. 12

$\vec{CM} = \left\{-1;0,5\right\}$, $\vec{BN} = \left\{0,5;-1\right\}$. Далее,

$$\cos(\angle MPN) = \cos\angle(\vec{CM}, \vec{BN}) =$$

$$\frac{\vec{CM}\cdot\vec{BN}}{|\vec{CM}|\cdot|\vec{BN}|} = \frac{-0,5-0,5}{|\vec{CM}|^2} = -\frac{4}{5}.$$

Следовательно, искомый угол равен $\pi - \arccos\dfrac{4}{5}$. ■

§ 2. Метод координат

Деление отрезка в данном отношении

Если точка $C(x;\, y)$ делит отрезок AB, координаты концов которого $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, в заданном отношении $AC : CB = k$, то координаты точки $C(x;\, y)$ определяются по формулам:

$$x = \frac{1}{1+k}x_1 + \frac{k}{1+k}x_2 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{1+k}y_1 + \frac{k}{1+k}y_2 .$$

Если $C(x;\, y)$ делит отрезок AB пополам, то координаты точки $C(x;\, y)$ определяются по формулам: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ и $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Уравнения прямой

Нормальный вектор прямой – любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой прямой.

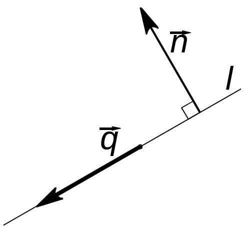


Рис. 13

Направляющий вектор прямой – любой ненулевой вектор, коллинеарный (т.е. параллельный) прямой. Нормальный и направляющий векторы прямой определяются неоднозначно, а с точностью до коллинеарности.

Угловой коэффициент прямой – тангенс угла наклона прямой с положительным направлением оси абсцисс: $k = \operatorname{tg}\varphi$. Угловой коэффициент существует у любой прямой, не параллельной оси ординат.

Пусть $\vec{n} = \{A; B\}$ – нормальный вектор, $\vec{q} = \{q_1; q_2\}$ – направляющий вектор, $M_0(x_0; y_0)$ – фиксированная точка прямой, k – угловой коэффициент прямой. Тогда уравнение прямой может быть записано в следующих видах:

(1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$;

(2) $Ax + By + C = 0$ (***общее*** уравнение прямой);

(3) $\dfrac{x - x_0}{q_1} = \dfrac{y - y_0}{q_2}$ (***каноническое*** уравнение прямой);

(4) $x = x_0 + q_1 t, \quad y = y_0 + q_2 t$, где t – любое действительное число (***параметрические уравнения*** прямой);

(5) $y = kx + b$ (***уравнение прямой с угловым коэффициентом***);

(6) $y - y_0 = k(x - x_0)$ (***уравнение прямой с угловым коэффициентом*** k ***, проходящей через точку*** $(x_0; y_0)$).

Пусть l – прямая, не проходящая через начало координат и не параллельная ни одной из осей координат. Если a и b – отрезки, отсекаемые прямой от осей координат (при этом возможны случаи $a < 0$ или $b < 0$), то уравнение прямой может быть записано в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (***уравнение прямой «в отрезках»***).

Параллельность и перпендикулярность

Пусть l_1 и l_2 – прямые, заданные общими уравнениями $a_i x + b_i y = c_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда:

(а) при $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке, координаты которой могут быть найдены из системы уравнений $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2; \end{cases}$

(б) прямые $l_1 \parallel l_2$ тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

(в) l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;

(г) $l_1 \perp l_2$ тогда и только тогда, когда $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$.

Примечание: в этих формулах допускается 0 в знаменателе; равенство $\frac{a}{0} = \frac{b}{c}$ интерпретируется как $a \cdot c = 0 \cdot b$.

Пусть l_1 и l_2 – прямые, имеющие нормальные векторы $\vec{n_1}, \vec{n_2}$, и направляющие векторы $\vec{q_1}, \vec{q_2}$. Тогда:

(а) при $\vec{n_1}$ не параллельном $\vec{n_2}$ (или $\vec{q_1}$ не параллельном $\vec{q_2}$) l_1 и l_2 пересекаются в точке;

(б) l_1 и l_2 параллельны или совпадают $\Leftrightarrow \vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{q_1} \parallel \vec{q_2}$;

(в) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{q_1} \perp \vec{q_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \Leftrightarrow \vec{q_1} \cdot \vec{q_2} = 0$.

Пусть l_1 и l_2 – прямые, заданные уравнениями: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$. Тогда:

(а) l_1 и l_2 пересекаются в точке $\Leftrightarrow$ $k_1 \neq k_2$;

(б) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow (k_1 = k_2, b_1 \neq b_2)$;

(в) l_1 и l_2 совпадают $\Leftrightarrow$ $(k_1 = k_2, b_1 = b_2)$;

(г) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

Расстояния и углы

Если $M(x_M; y_M)$ и $N(x_N; y_N)$, то $MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$ (***формула расстояния между двумя точками плоскости***).

Расстояние $\rho(M, l)$ ***от точки*** $M(x_M; y_M)$ ***до прямой*** l может быть вычислено по следующей формуле: $\rho(M, l) = \dfrac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, если прямая l задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$.

Расстояние между параллельными прямыми $l_1 : ax + by = c_1$ и $l_2 : ax + by = c_2$ вычисляется по формуле: $\rho(l_1, l_2) = \dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Угол φ ***между прямыми*** l_1 и l_2 может быть найден по формулам:

(а) $\cos\varphi = \left| \dfrac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} \right|$, где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ – нормальные вектора l_1 и l_2;

(б) $\cos\varphi = \left| \dfrac{\vec{q_1} \cdot \vec{q_2}}{|\vec{q_1}| \cdot |\vec{q_2}|} \right|$, где $\vec{q_1}$ и $\vec{q_2}$ – направляющие вектора l_1 и l_2;

(в) $\operatorname{tg}\varphi = \left| \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$, где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты l_1 и l_2.

Уравнение окружности

Окружность радиуса R с центром в начале координат имеет уравнение $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M_0 = (x_0; y_0)$ имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Площади

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{a_1; a_2\}$ и $\vec{b} = \{b_1; b_2\}$, выражается формулой $S = | a_1 b_2 - a_2 b_1 |$.

Примечание. $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$, если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки), и меньше нуля, если в отрицательном направлении.

Площадь треугольника ABC с вершинами $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ и $C(x_C; y_C)$: $S_{ABC} = | x_A(y_C - y_B) + x_B(y_A - y_C) + x_C(y_B - y_A) |$.

Формула площади многоугольника с вершинами $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, … , $M_n(x_n; y_n)$:

$$S = | x_1(y_n - y_1) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) + ... + x_n(y_{n-1} - y_1) |.$$

Задача 1. Доказать, что длина отрезка, соединяющих середины диагоналей трапеции равна половине модуля разности длин оснований.

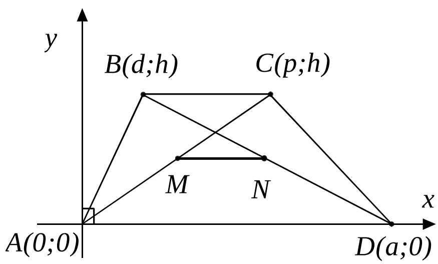


Рис. 14

Решение. □ Введем прямоугольную систему координат (см. рис. 14). Тогда вершины трапеции будут иметь координаты $A(0; 0)$, $B(d; h)$, $C(p; h)$ и $D(a; 0)$. Середины диагоналей AC и BD имеют координаты: $M\left(p/2;\ h/2\right)$ и $N\left((a+d)/2;\ h/2\right)$, поэтому

$$MN = \sqrt{\frac{(a + d - p)^2}{4}} = \frac{| a + d - p |}{2}.$$

Так как $AD = a$, $BC = p - b$, то при $AD \geq BC$ $AD - BC = = a + d - p \geq 0$ и $MN = (AD - BC)/2$, а при $AD < BC$ $AD - BC = = a + d - p < 0$ и $MN = (BC - AD)/2$. Следовательно,

$$MN = \frac{|AD - BC|}{2}. \blacklozenge$$

Задача 2. Концы отрезка длины a скользят по двум сторонам данного прямого угла. Какую линию описывает середина отрезка?

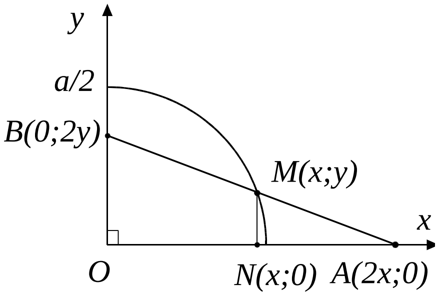


Рис. 15

Решение. □ Введем декартову систему координат, поместив начало координат в вершину угла, а оси направив по сторонам угла (см. рис. 15). Пусть точка $M(x;\, y)$ обладает указанным свойством. Понятно, что точка $M(x;\, y)$ может находиться только в первом квадранте координатной плоскости, поэтому $x \geq 0,\ y \geq 0$. Обозначим концы отрезка через A и B. Поскольку точки A и B лежат на координатных осях и точка $M(x;\, y)$ является серединой отрезка AB, то $A(2x;\, 0)$, $B(0;\, 2y)$. По теореме Пифагора для треугольника AOB получаем $AB = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}$.

Так как по условию задачи $AB = a$, то координаты точки $M(x;\, y)$ удовлетворяют уравнению $4x^2 + 4y^2 = a^2$ или с учетом вышесказанного следует, что точка M принадлежит дуге окружности $x^2 + y^2 = \left(a/2\right)^2$, расположенной в первом квадранте.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть точка $M(x;\, y)$ принадлежит дуге окружности $x^2 + y^2 = \left(a/2\right)^2$, расположенной в первом квадранте. Соединим точку M с точкой $A(2x;\, 0)$. Продолжим отрезок AM до пересечения с осью ординат в точке B. Очевидно, что ордината точки B равна $2y$ (в треугольнике AOB $ON = NA$ и отрезок MN параллелен оси ординат, следовательно, $MN -$ средняя линия). Значит $M(x;\, y)$ является серединой отрезка AB, концы которого принадлежат сторонам прямого угла. По теореме Пифагора для треугольника AOB получаем $AB=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}=a$. Получили, что каждая точка M, принадлежащая дуге окружности $x^2+y^2=\left(a/2\right)^2$, расположенной в первом квадранте, является серединой отрезка, концы которого принадлежат сторонам данного прямого угла. �

Задача 3. Может ли быть правильным треугольник, расстояния от вершин которого до двух взаимно перпендикулярных прямых выражаются целыми числами?

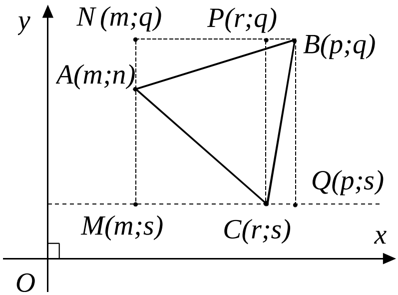


Рис. 16

Решение. □ Допустим, что такой треугольник существует. Введем декартову систему координат, поместив начало координат в точку пересечения данных перпендикулярных прямых. Пусть тогда Ox и Oy эти прямые (см. рис. 16). Дополним данный правильный треугольник до прямоугольника. Длины сторон прямоугольника $MNBQ$ MN, NB, BQ, QM отрезков NP, PB, QC, MC, CM, MA и AN выражаются целыми числами, как разности координат соответствующих точек. Поэтому площади прямоугольника $MNBQ$ и прямоугольных треугольников AMC, ANB и BQC есть рациональные числа. Площадь $\vartriangle ABC$ может быть вычислена следующим образом

$$S_{\vartriangle ABC}=S_{MNBQ}-(S_{\vartriangle AMC}+S_{\vartriangle ANB}+S_{\vartriangle BQC})$$

и должна быть рациональным числом.

С другой стороны,

$$S_{\vartriangle ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

где $a-$ длина стороны треугольника. Но число a^2 равно квадрату длины гипотенузы треугольника BQC и является целым числом. Поэтому $S_{\vartriangle ABC}$ выражается иррациональным числом. Получили противоречие. Следовательно, такого треугольника не существует. �

Глава 7. Задачи на отыскание геометрических фигур с экстремальными значениями элементов

Элементы теории

Рассмотрим класс геометрических задач, в которых требуется найти фигуры или их элементы с экстремальными (наибольшими или наименьшими) значениями. В подобных задачах, как правило речь идет о том, чтобы среди всех фигур, обладающих определенным свойством, найти фигуру, у которой тот или иной элемент принимает наибольшее или наименьшее значение.

Общий метод решения таких задач приводит к задаче отыскания наибольшего или наименьшего значения некоторой определенной на промежутке непрерывной функции $f(x)$.

Для отыскания наименьшего и наибольшего значений функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$, следует найти все ее критические точки, лежащие внутри отрезка; вычислить значения этой функции в этих точках и на концах отрезка и из всех полученных таким образом чисел выбрать наибольшее и наименьшее. Наибольшее (наименьшее) из этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Наибольшие и наименьшие значения просто находятся в случаях, если:

а) функция не имеет на отрезке $[a;b]$ критических точек. Тогда, если $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a;b]$, то при $x=a$ она будет принимать наименьшее (наибольшее) значение, а при $x=b$ – наибольшее (наименьшее) значение. В этом случае локальные максимумы и минимумы функции на отрезке отсутствуют, а наибольшее и наименьшее значения непрерывной на $[a;b]$ функции обязательно существуют;

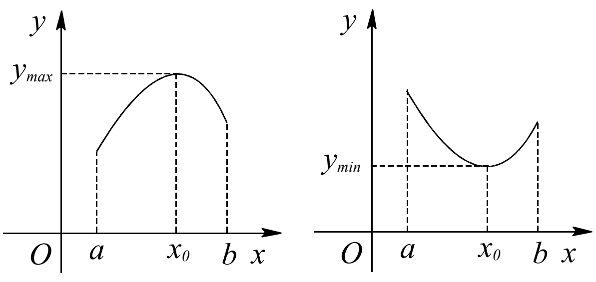


Рис. 1

б) функция имеет внутри отрезка один максимум (минимум) и не имеет минимумов (максимумов). Тогда этот единственный максимум (минимум) и является наибольшим (наименьшим) значением функции. В этом случае не надо вычислять значения функции на концах отрезка (см. рис. 1). Это же применимо и к интервалу $(a;b)$, а также к бесконечному промежутку (при условии, что наибольшее (наименьшее) значение функции существует).

В некоторых случаях можно упростить исследование на экстремум функции $f(x)$, заменив ее более простой функцией $\varphi(x)$.

1. В случае функции $f(x)=k\varphi(x)+b$ (k,b – постоянные) исследование можно провести для функции $\varphi(x)$, так как, если $k>0$, то функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют одноименные экстремумы в одних и тех же точках. Экстремальные значения у этих функций различны. Если $k<0$, то функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют одни и те же точки экстремума, но точкам максимума функции $f(x)$ соответствуют точки минимума функции $\varphi(x)$, и наоборот.

2. При исследовании функции $f(x)=\sqrt{\varphi(x)}$ $\left(\varphi(x)\geq 0\right)$ можно воспользоваться исследованием функции $\varphi(x)$, так как функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют экстремумы в одних и тех же точках области допустимых значений x.

3. При исследовании функции $f(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$ $\left(\varphi(x)>0\right)$ можно воспользоваться функцией $\varphi(x)$, так как точкам максимума функции $f(x)$ соответствуют точки минимума функции $\varphi(x)$, и наоборот.

4. Если задача свелась к нахождению наибольшего или наименьшего значения квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ $\left(a\neq 0\right)$, то следует заметить, что функция $f(x)$ в точке $x_0=-b/2a$ достигает экстремального значения $f(x_0)=-\dfrac{D}{4a}$. Причем, если $a>0$, то – минимального значения, если $a<0$, то – максимального. Значит, квадратный трехчлен принимает на $\mathbb{R}$ наибольшее (наименьшее) значение $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_0)$ $(\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_0))$, равное $f(x_0)$, если $a<0$ $(a>0)$.

Для решения геометрических задач, в которых требуется отыскать наименьшее или наибольшее значение какой-либо величины, следует:

1) выбрать независимую переменную (аргумент) и установить область ее допустимых значений;

2) выразить зависимую величину через аргумент (записать функцию);

3) решить задачу на отыскание наибольшего или наименьшего значения исследуемой функции в найденной области (если это значение существует).

Заметим, что при решении геометрических задач независимую переменную можно выбирать несколькими способами и таким образом получать различные аналитические выражения исследуемой функции. Удачный выбор аргумента позволяет упростить решение задачи за счет сокращения алгебраических преобразований и вычислений.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. В круг радиуса R вписан равнобедренный треугольник наибольшего периметра. Найти периметр этого треугольника.

Решение. □ Пусть ABC данный равнобедренный треугольник ($AB = AC$), вписан в круг с центром в точке O и радиусом R (см. рис. 2). В качестве независимой переменной x примем половину величины угла при вершине A. Тогда

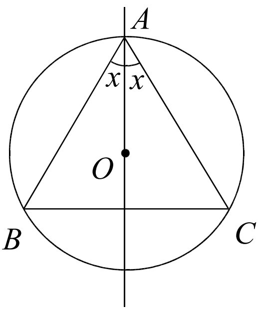


Рис. 2

$$AC = 2R\sin\angle ABC = 2R\sin(\pi/2 - x) =$$
$$= 2R\cos x,$$
$$BC = 2R\cos\left(\pi/2 - 2x\right) = 2R\sin 2x$$

и периметр $P(x) = 2R\left(2\cos x + \sin 2x\right)$.

Задача сводится к определению наибольшего значения функции $f(x) = \cos x + 0,5\sin 2x$ на отрезке $\left[0;\pi/2\right]$. Так как $f'(x) = -\sin x + \cos 2x$, то, решив уравнение $\cos 2x - \sin x = 0$, найдем единственную критическую точку $x = \pi/6$ на отрезке $\left[0;\pi/2\right]$. Поскольку $f(0) = 1$, $f\left(\pi/2\right) = 0$, $f\left(\pi/6\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения при $x = \pi/6$.

Периметр треугольника $P(x)$ принимает наибольшее значение в той же точке, что и функция $f(x)$, поэтому искомый треугольник –

равносторонний, длина его стороны равна $R\sqrt{3}$, а периметр равен $3R\sqrt{3}$. ◆

Задача 2. Периметр треугольника и длина одной из его сторон равны 20 и 5 *см*. Какую длину должны иметь другие стороны треугольника, чтобы его площадь была наибольшей? Вычислить эту площадь.

Решение. □ Пусть ABC данный треугольник, в котором $AC=5$ *см*, $P_{\vartriangle ABC}=20$ *см*. Обозначим $AB=x$ *см*. Тогда, так как $P_{\vartriangle ABC}=AC+AB+BC,$ то $20=x+5+BC$ и $BC=15-x$ *см*. Площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле Герона:

$$S_{\vartriangle ABC}=\sqrt{p(p-AC)(p-BC)(p-AB)},$$

где $p=\dfrac{P_{\vartriangle ABC}}{2}=10$ *см*. Подставляя выражения для сторон в формулу площади, получаем функцию $S(x)=\sqrt{50(10-x)(x-5)}$, где $x\in[5;10]$. Так как площадь треугольника должна быть наибольшей, то надо исследовать функцию $S(x)$ на наибольшее значение. Заменим функцию $S(x)$ функцией $\varphi(x)=(10-x)(x-5)=-x^2+15x-50$. Функция $\varphi(x)$ является квадратичной и достигает своего наибольшего значения в точке $x=\dfrac{-15}{-2}=7{,}5$, $x\in[5;10]$. Значит, при $x=7{,}5$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение. Тогда $AB=7{,}5$, $BC=7{,}5$ и

$$S=\max_{[5;10]}S(x)=S(7{,}5)=\sqrt{50\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5}=2{,}5\cdot 5\sqrt{2}=12{,}5\sqrt{2}\ \text{см}^2. ◆$$

Задача 3. В полукруг с диаметром AB длины d произвольно проведен радиус и в каждый полученный сектор вписана окружность. Определить положение радиуса, при котором расстояние между точками касания этих окружностей с диаметром AB будет наименьшим. Найти это расстояние.

Решение. □ Пусть (см. рис. 3) OC – данный радиус, r_1 и r_2 – радиусы вписанных окружностей, точки O_1, O_2 – их центры, M – точка касания окружности с центром O_1 диаметра AB, N – точка касания

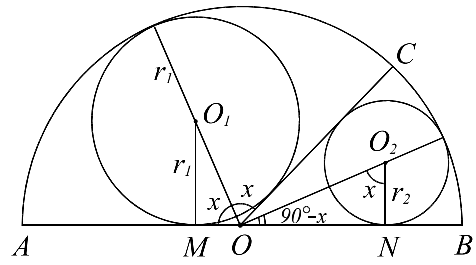


Рис. 3

окружности с центром O_2 диаметра AB. Точка O_1 будет лежать на биссектрисе угла COA, так как точка O_1 равноудалена от AO и OC. Аналогично, точка O_2 лежит на биссектрисе угла COB.

Если $\angle COA = 2x$, то $\angle COB = \pi - 2x$, $\angle BOO_2 = \pi/2 - x$.

Из треугольника OMO_1 $r_1 = OO_1 \sin x = (R - r_1)\sin x$, а из $\triangle ONO_2$ $r_2 = OO_2 \cos x = (R - r_2)\cos x$. Выразим $r_1 = \dfrac{R\sin x}{1+\sin x}$, $r_2 = \dfrac{R\cos x}{1+\cos x}$. Из треугольников MO_1O и NO_2O получаем: $MO = r_1 \operatorname{ctg} x = \dfrac{R\sin x \cdot \cos x}{(1+\sin x)\sin x} = \dfrac{R\cos x}{1+\sin x}$ и $NO = r_2 \operatorname{tg} x = \dfrac{R\sin x}{1+\cos x}$. Тогда $MN = MO + NO = \dfrac{R\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{R\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{d}{2}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$.

Задача свелась к нахождению наименьшего значения функции $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Производная функции:

$$f'(x) = \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} + \frac{\cos x(1+\cos x) + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\cos x} - \frac{1}{1+\sin x} = \frac{\sin x - \cos x}{(1+\sin x)(1+\cos x)}.$$

Единственная критическая точка $x = \pi/4$ получается из условия $f'(x) = 0$. Так как $f(0) = f(\pi/2) = 1$ и $f(\pi/4) = 2(\sqrt{2}-1)$, поэтому $\min\limits_{[0;\,\pi/2]} f(x) = 2(\sqrt{2}-1)$ и наименьшее расстояние между точками касания окружностей с диаметром данного полукруга равно $2(\sqrt{2}-1)$. ◆

Задача 4. Какую наибольшую площадь может иметь трапеция, три стороны которой равны a?

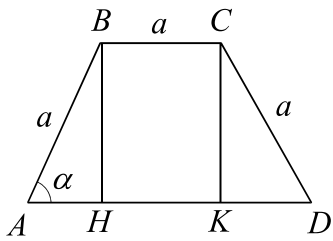


Рис. 4

Решение. □ Пусть $ABCD$ данная трапеция и $AB = BC = CD = a$ (см. рис. 4). Заметим, что AD не может равняться BC, так как в противном случае, фигура $ABCD$ по признаку являлась бы параллелограммом в силу равенства и параллельности противоположных сторон. Пусть $\angle BAD = \alpha$, $\alpha \in [0; \pi/2]$. Опустим высоту трапеции BH. Из треугольника BHA получим

$$BH = AB \sin\angle BAH = a\sin\alpha, \; AH = AB\cos\angle BAH = a\cos\alpha.$$

Так как трапеция равнобедренная, то $AH = KD$, $HK = BC$. Тогда $AD = 2AH + HK = 2a\cos\alpha + a$. Выразим площадь трапеции:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{2a\cos\alpha + 2a}{2} a\sin\alpha = a^2 \sin\alpha(1+\cos\alpha).$$

Найдем наибольшее значение функции $f(\alpha) = \sin\alpha(1+\cos\alpha)$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

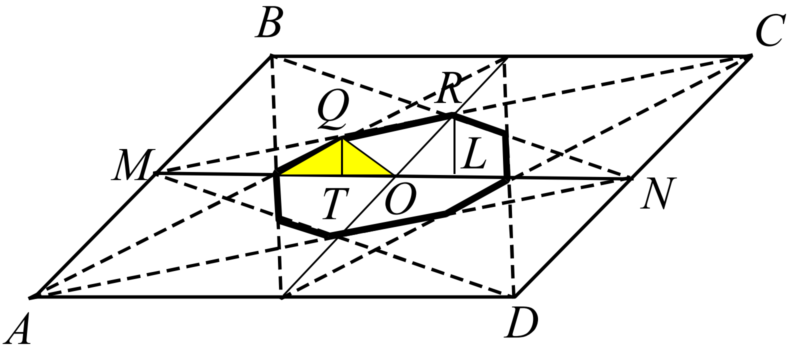
$$f'(\alpha) = \cos\alpha(1+\cos\alpha) + \sin\alpha(-\sin\alpha) = \cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Найдем критические точки функции, решив уравнение:

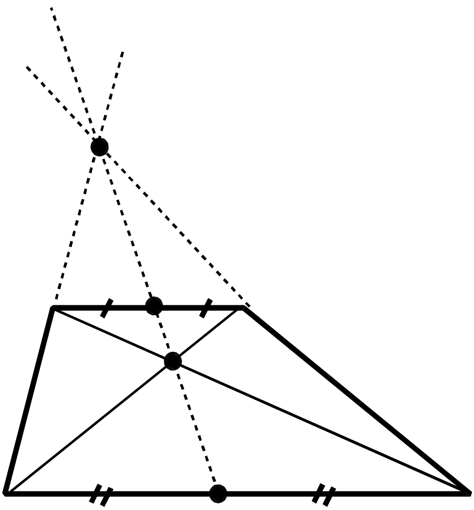
$$\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

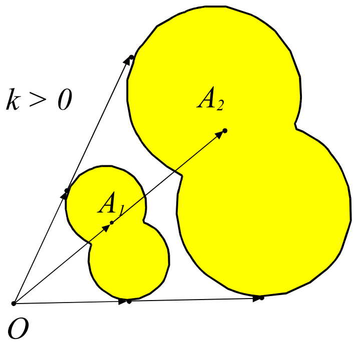
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{1}{2}, \\ \cos\alpha = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

В промежутке $[0; \pi/2]$ находится только одно решение уравнения $\alpha = \pi/3$. Так как $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = 1$ и $f(\pi/3) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, то в точке $\alpha = \pi/3$ функция $f(\alpha)$ принимает наибольшее значение. Тогда площадь данной трапеции равна $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. ◆



Задачи для самостоятельного решения





§ 1. Основные понятия

Уровень I

1.1. а) На плоскости проведены две пересекающиеся прямые. Докажите, что биссектрисы четырех образовавшихся углов лежат на двух перпендикулярных прямых.

б) Докажите, что прямая, проведенная через вершину угла перпендикулярно к его биссектрисе, есть биссектриса угла, смежного с ним.

1.2. а) Найдите величину внутреннего угла треугольника, если сумма величин двух внешних углов, не смежных с ним, равна $237°$.

б) Углы CAB и BAD – смежные. Найдите величину угла BAD, если величина угла между биссектрисой угла CAB и перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой CD, равна $12°$.

1.3. Докажите, что перпендикуляр, восстановленный из произвольной точки, взятой на стороне острого угла, обязательно пересекает другую сторону этого угла.

1.4. Докажите, что биссектрисы внешних и внутренних односторонних углов при параллельных прямых взаимно перпендикулярны, а соответственных или накрест лежащих углов параллельны.

1.5. а) Четыре луча a, b, c, d имеют общую вершину. Лучи c и d делят угол (a, b) на три равные части. Докажите, что биссектриса угла (c, d) является также и биссектрисой угла (a, b).

б) Два угла имеют общую вершину. Стороны одного перпендикулярны сторонам другого. Найдите эти углы, если разность между ними равна прямому углу.

1.6. а) Внутренние углы треугольника относятся как 1:2:3. Найдите меньший угол треугольника.

б) Внутренние углы треугольника относятся как 2:3:5. Найдите внешний угол треугольника, смежный с меньшим углом.

1.7. На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся в точке O. Пусть A – произвольная точка плоскости, точки A_1 и A_2 симметричны A относительно данных прямых. Докажите, что угол A_1OA_2 в два раза больше угла между прямыми.

1.8. На прямой MN между точками M и N выбрана точка A и проведены по одну сторону от MN лучи AB, AC и AD. На луче AB выбрана точка K и через нее проведена прямая, параллельная MN и пересекающая лучи AC и AD соответственно в точках P и E, так что $KP = PA = PE$. Докажите, что $AB \perp AD$.

1.9. На отрезке AB взята точка C. Через точки A и B проведены по одну сторону от AB параллельные лучи. На них отложены отрезки $AD = AC$ и $BE = BC$. Точка C соединена отрезками прямых с точками D и E. Докажите, что $DC \perp CE$.

1.10. а) На рис. 1 $AB = BD,\ CD = DE$, $AC = AE$. Докажите, что $BD \parallel AE$.

б) На рис. 2 $AC -$ биссектриса угла BAM, $AD = CE,\ BE = BD,$ $\angle BDA = \angle BEC$. Докажите, что $AM \parallel BC$.

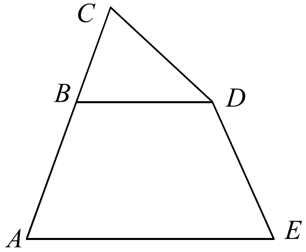


Рис. 1

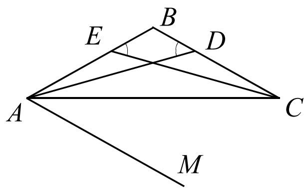


Рис. 2

1.11. На прямой последовательно расположены точки:

а) A, B, C, D и E так, что длина отрезка BC в 2 раза больше длины отрезка AB, CD на 3 *см* меньше BC, DE на 5 *см* меньше AB, а отрезок AE равен 40 *см*. Найдите длины отрезков AB, BC, CD, DE.

б) A, B, C, D так, что $AC + BD = 27, 2AB = CD, BC = AB - 2$. Найдите длину отрезка BC.

1.12. Точка B лежит на отрезке AC и делит его в отношении $AB : BC = k \neq 0$. Найдите $AC : AB$.

1.13. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой, причем C находится между A и D, а точка $B -$ между A и C. Известно, что

а) $\dfrac{AB}{BC} = k, \dfrac{BC}{CD} = l$. Найдите $\dfrac{AC}{BD}$.

б) $\dfrac{AD}{CD} = k, \dfrac{AC}{BC} = l$. Найдите $\dfrac{AB}{BD}$.

в) $\dfrac{AC}{BD} = k, \dfrac{AD}{BC} = l$. Найдите $\dfrac{AB}{CD}$.

§ 2. Равенство и подобие фигур

Уровень I

2.1. а) На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABM и BCN. Докажите, что треугольник MND также равносторонний.

б) Докажите, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, образуют квадрат.

2.2. Будут ли равны два треугольника, если у них соответственно:

а) равны две стороны и угол не между ними;

б) равны две стороны и угол не между ними при условии, что этот угол в одном из треугольников наибольший;

в) равны сторона и два угла, один из которых – противолежащий стороне?

2.3. Используя признаки равенства треугольников, выясните, будут ли равны два треугольника при указанных условиях:

а) по двум сторонам и медиане к третьей стороне;

б) по двум медианам и стороне;   в) по трем медианам.

2.4. Докажите: а) теорему о средней линии треугольника;

б) теорему о медианах треугольника.

2.5. Докажите, что треугольник является равнобедренным, если равны длины двух его: а) высот;   б) медиан.

2.6. а) В треугольнике ABC точка A_1 – середина стороны BC, B_1 – середина AC, C_1 – середина AB. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Чему равен коэффициент подобия?

б) Через вершины треугольника ABC проведены прямые, параллельные противолежащим сторонам. Найдите площадь треугольника, образованного этими прямыми, если площадь $\triangle ABC$ равна 6.

2.7. Можно ли утверждать, что четырехугольники подобны, если:

а) соответствующие углы четырехугольников равны;

б) соответствующие стороны четырехугольников пропорциональны?

2.8. а) В трапеции проведена средняя линия. Верно ли, что две трапеции, на которые она разбивает данную трапецию, подобны?

б) В трапеции проведен отрезок, соединяющий середины оснований. В каком случае он разбивает трапецию на подобные трапеции?

2.9. Отрезок, параллельный основаниям трапеции, разбивает ее на две подобные трапеции. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b.

2.10. Два треугольника подобны с коэффициентом подобия k . Чему равно отношение:

а) соответственных медиан треугольника;

б) соответственных высот;

в) радиусов вписанных окружностей;

г) площадей вписанных кругов;

д) площадей треугольников;

е) сумм квадратов сторон;

ж) сумм кубов сторон?

2.11. а) Высота треугольника равна $\sqrt{8}$. Прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него меньший треугольник, площадь которого равна половине площади данного треугольника. Найдите высоту меньшего треугольника.

б) Основание треугольника равна $\sqrt{98}$. Найдите длину отрезка прямой, параллельной основанию и делящей площади данного треугольника пополам.

2.12. а) Основание треугольника равно a , высота равна h . В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие на боковых сторонах. Найдите длину стороны квадрата.

б) В равносторонний треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие на боковых сторонах. Найдите площадь треугольника, если сторона квадрата равна $\sqrt[4]{3} \cdot (2-\sqrt{3})$.

2.13. а) Стороны одного треугольника равны a, b, c , другого a, b , c_1 , причем $c_1 \neq c$. Могут ли треугольники быть подобны?

б) Пусть $ABCD$ параллелограмм, не являющийся прямоугольником. Докажите, что треугольники ABD и ACD не подобны.

2.14. а) В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ $O-$ точка пересечения диагоналей. Через точку O проведена параллельно основаниям прямая, пересекающая ее боковые стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PO = OQ$.

б) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.

2.15. а) Наибольшие стороны двух подобных треугольников соответственно равны 40 и 16 *см*, а разность их периметров равна 60 *см*. Определите периметры этих треугольников.

б) Площади двух подобных треугольников равны соответственно 20 и 45, а разность их наибольших сторон равна 7. Найдите эти стороны.

2.16. Докажите теорему о биссектрисе:

а) внутреннего угла: ***биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, отношение которых равно отношению прилежащих к биссектрисе сторон***.

б) внешнего угла: ***биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в такой точке, отношение расстояний от которой до концов этой стороны равно отношению прилежащих сторон***.

2.17. а) В треугольнике ABC $AB=3$, $AC=5$, $BC=7$. Точка D, лежащая на стороне BC, одинаково удалена от сторон AB и AC. Найдите длины отрезков BD и DC.

б) В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D, одинаково удаленная от сторон AB и AC. Известно, что площадь треугольника ABC в четыре раза больше площади треугольника ABD. Найдите длину стороны AC, если $AB=10$.

2.18. а) На медиане BK треугольника ABC взята точка L так, что $\frac{BL}{LK}=4$. Через точки C и L проведена прямая до пересечения со стороной AB в точке M. Найдите отношение $\frac{AM}{MB}$.

б) На стороне AC треугольника ABC взята точка K так, что $\frac{AK}{KC}=\frac{1}{4}$. На отрезке BK взята точка L так, что $\frac{BL}{LK}=\frac{3}{2}$. Через точки L и C проведена прямая до пересечения со стороной AB в точке M. Найдите отношение $\frac{AM}{MB}$.

Уровень II

2.19. В треугольнике ABC $\angle C - \angle B = 90°$. Биссектриса внутреннего угла A пересекает BC в точке L, а биссектриса внешнего угла при вершине A пересекает продолжение BC в точке L_1. Докажите, что биссектрисы AL и AL_1 равны.

2.20. а) В треугольник со сторонами 10 *см*, 17 *см* и 21 *см* вписан прямоугольник с периметром 24 *см* так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найдите стороны прямоугольника.

б) В треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что K и N лежат на стороне BC. Докажите, что площадь прямоугольника $KLMN$ наибольшая в случае, если сторона LM делит высоту AA_1 пополам.

2.21. а) На стороне AC треугольника ABC взята точка K так, что $AK : KC = 2 : 3$. На отрезке BK взята точка L так, что $BL : LK = 5 : 7$. Через точки L и C проведена прямая до пересечения со стороной AB в точке M. Найдите отношение $AM : MB$.

б) В треугольнике ABC длины сторон AB, BC и AC относятся как $2 : 4 : 5$ соответственно. В каком соотношении делятся биссектрисы внутренних углов треугольника в точке их пересечения?

2.22. а) В треугольнике ABC из вершин A и B проведены отрезки AD и BE, пересекающие стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Известно, что в точке пересечения Q эти отрезки делятся в отношении $\dfrac{AQ}{QD} = x$, $\dfrac{BQ}{QE} = y$. Найдите отношения $\dfrac{AE}{EC}$ и $\dfrac{BD}{DC}$.

б) В треугольнике ABC отрезки AD и BE, проведенные из вершин A и B к сторонам BC и AC соответственно, делятся в точке пересечения Q в отношении $\dfrac{AQ}{QD} = \dfrac{7}{5}$ и $\dfrac{BQ}{QE} = \dfrac{3}{4}$. В каком отношении точки E и D делят стороны треугольника?

2.23. В треугольнике ABC отрезок AD, проведенный из вершины A к стороне BC, делит в отношении $BD : DC = 2 : 3$. Из вершины B к стороне AC проведен отрезок BE, пересекающий отрезок AD в точке Q так, что $BQ = 2QE$. В каком отношении точка E делит сторону AC?

§ 3. Соотношения между элементами треугольника

Уровень I

3.1. а) Две стороны треугольника равны a и b. Определите, в каких пределах может изменяться третья сторона c.

б) Две стороны треугольника равны $a=2$ и $b=3$. Определите, какие значения может принимать медиана m_c к третьей стороне. Ответьте на поставленный вопрос для произвольных значений a и b.

3.2. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по:

а) двум сторонам a, c и медиане m_b;

б) основанию a и медианам боковых сторон m_b и m_c.

3.3. Найдите углы треугольника, длины сторон которого равны:

а) 3; 7; 12; б) 2, $\sqrt{3}-1$, $\sqrt{6}$; в) 3; 4; 5.

г) Является ли треугольник со сторонами 10, 14 и 17 тупоугольным?

3.4. а) В треугольнике ABC угол A равен $120°$ и $AB:AC=2$. Найдите отношение $BC:AC$.

б) В треугольнике ABC угол C составляет $135°$, а отношение сторон $BC:AC=(\sqrt{3}-1):\sqrt{2}$. Найдите угол B.

3.5. а) Выведите формулу длины медианы m_c к стороне c через длины сторон треугольника a, b, c.

б) Длины сторон треугольника равны 11, 12 и 13 *см*. Найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.

3.6. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника составляет 75 % от суммы квадратов его сторон.

3.7. Докажите, что в треугольнике большей стороне соответствует меньшая медиана.

3.8. Две стороны треугольника равны 6 и 8, а медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

3.9. Две стороны треугольника равны a и b, угол между ними равен φ. Выведите формулу длины биссектрисы l_c к третьей стороне.

3.10. а) Две стороны треугольника равны: $a=2$ и $b=3$. Определите, в каких пределах лежит длина биссектрисы l_c к третьей стороне? Решите задачу для произвольных значений a и b.

б) В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20 *см*. Найдите длину биссектрисы при основании треугольника.

3.11. Докажите, что в треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса. Выведите отсюда, что если биссектрисы треугольника равны между собой, то треугольник равнобедренный.

3.12. а) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и BN. Найдите MN, если $AB = c, \angle C = \varphi$.

б) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и BN. Найдите AB, если известно, что периметр треугольника ABC равен 15, периметр треугольника NCM равен 9, а радиус окружности описанной около треугольника NCM равен 1,8.

в) На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N. Найдите площадь треугольника AMN, если площадь треугольника ABC равна S, а $\angle BAC = \alpha$.

3.13. Выведите формулу радиуса окружности: а) описанной около треугольника, а именно $R = \dfrac{abc}{4S}$; б) вписанной в треугольник, а именно: $r = \dfrac{2S}{P}$, где S и $P -$ площадь и периметр треугольника.

3.14. а) Длины сторон треугольника равны 7, 8 и 9. Найдите R и r.

б) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 20, диаметр описанной окружности равен 25. Найдите радиус вписанной окружности.

3.15. Стороны треугольника равны 4, 5, 6. Докажите, что наибольший угол треугольника вдвое больше наименьшего.

Правильный треугольник

3.16. а) Площадь правильного треугольника равна $9\sqrt{3}$. Найдите расстояние от середины высоты, опущенной на основание, до боковой стороны.

б) Площадь правильного треугольника равна $48\sqrt{3}$. Найдите расстояние между серединами медиан треугольника.

3.17. Два правильных треугольника имеют общую среднюю линию. Найдите расстояние между центрами треугольников, если площади треугольников равны $81\sqrt{3}$.

3.18. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри правильного треугольника, до его сторон в три раза больше радиуса вписанной в него окружности.

Равнобедренный треугольник

3.19. Докажите, что в остроугольном равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон есть величина постоянная, равная высоте, проведенной к боковой стороне.

3.20. а) Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника, опущенную на основание, на отрезки 5 *см* и 3 *см*. Найдите стороны треугольника.

б) Основание равнобедренного треугольника равно 24, а боковая сторона 15. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.

3.21. Длина основания равнобедренного треугольника равна a, а величина угла при вершине α. Найдите длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

Уровень II

3.22. В треугольнике из вершины угла проведены биссектриса и высота. Докажите, что угол между ними равен полуразности двух других углов.

3.23 Докажите, что в треугольнике биссектрисы двух внешних углов и третьего внутреннего, не смежного с ними, пересекаются в одной точке.

3.25. Докажите, что в любом треугольнике:
а) сумма квадратов биссектрис не больше квадрата его полупериметра;
б) сумма квадратов высот не больше квадрата его полупериметра.

3.26. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 4, $\angle CAB = 60°$, а радиус описанной окружности 2,2. Докажите, что длина высоты, опущенной из вершины C на AB, строго меньше $2{,}2\sqrt{3}$.

3.27. В треугольнике ABC сторона $BC = 5$. Окружность проходит через вершины B и C и пересекает сторону AC в точке K так, что $CK = 3$, $KA = 1$. Известно, что косинус угла ACB равен $4/5$. Найдите отношение радиуса данной окружности к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABK.

3.28. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а угол ABC равен $120°$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади описанного около него круга.

3.29. Определите косинус угла между высотой и медианой треугольника, проведенными из вершины с углом β, если остальные углы треугольника равны α и γ.

3.30. В треугольнике ABC $AB = 4$ *см*, $AC = 2$ *см*, $BC = 3$ *см*. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найдите длину отрезка KM.

Равносторонний треугольник

3.31. Правильный треугольник ABC, длина стороны которого равна 3, вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причем длина хорды AD равна $\sqrt{3}$. Найдите длины хорд BD и CD.

3.32. Равносторонний треугольник, площадь которого равна 1, повернут около своего центра на угол $30°$ относительно своего первоначального положения. Найдите площадь, общую обеим положениям треугольника.

3.33. На высоте равностороннего треугольника как на диаметре построена окружность. Длина стороны треугольника равна a. Найдите площадь той части треугольника, которая лежит вне данного круга.

Равнобедренный треугольник

3.34. Через точку внутри данного угла провести прямую, отсекающую от его сторон равные отрезки.

3.35. а) В равнобедренном треугольнике длина основания равна a, а угол при основании α. Найдите радиусы описанной около него и вписанной в него окружностей.

б) Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в 3 раза больше длины окружности, вписанной в этот треугольник. Найдите косинус угла при основании треугольника.

в) В равнобедренный треугольник с углом $120°$ вписана окружность. Найдите ее радиус, если площадь треугольника равна S.

3.36. В равнобедренном треугольнике отношение боковой стороны к основанию равно $5/8$. Найдите отношение радиуса вписанного в треугольник круга к основанию треугольника.

3.37. Восстановите равнобедренный треугольник:

а) по основаниям трех его высот; б) по основаниям его высот к боковым сторонам и точке основания; в) по основаниям двух его высот и одной из вершин; г) по основанию одной из его высот и двум вершинам; д) по серединам его сторон; е) по основаниям его биссектрис; ж) по основаниям и длине высот к боковым сторонам.

§ 4. Прямоугольный треугольник

Уровень I

4.1. а) Длина одного катета прямоугольного треугольника на 10 *см* больше другого катета и на 10 *см* меньше длины гипотенузы. Найдите длину гипотенузы.

б) Длина одного из катетов прямоугольного треугольника больше длины другого на 1 *см*. Найдите длину гипотенузы, если известно, что площадь треугольника равна 6 *см*^{2}.

4.2. а) Площадь прямоугольного треугольника равна $\sqrt{2}$, а длина одного из катетов равна 1. Найдите длину гипотенузы.

б) Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, периметр которого равен 12 *см*, а площадь – 6 *см*^{2}.

в) Длины катетов прямоугольного треугольника относятся как 3:4, а площадь треугольника равна 24. Найдите длину высоты, опущенной на гипотенузу.

4.3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а острый угол $60°$. Найдите площадь этого треугольника.

4.4. а) Пусть a и b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза, c_a, c_b – проекции катетов на гипотенузу, h – высота, опущенная на гипотенузу. Докажите, что справедливы следующие соотношения: $h=\sqrt{c_a \cdot c_b}$, $a=\sqrt{c \cdot c_a}$, $b=\sqrt{c \cdot c_b}$.

б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если проекции катетов на гипотенузу равны p и q.

4.5. а) В прямоугольный треугольник с катетами a, b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.

б) Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, разбивает его на два треугольника, периметры которых равны l_1 и l_2. Найдите периметр исходного треугольника.

4.6. а) Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1:2. Найдите стороны треугольника.

б) Определите острые углы прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная из вершины прямого угла, делит его в отношении 1:2.

4.7. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 24 и 18 *см*.

4.8. а) Точка на гипотенузе, равноудаленная от катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40. Найдите длины катетов.

б) В треугольнике ABC угол A – прямой, точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных на катеты из точки O – центра описанной около треугольника окружности. Площадь четырехугольника $ADOE$ равна 6. Найдите площадь треугольника ABC.

4.9. а) Гипотенуза прямоугольного треугольника делится вписанной окружностью на отрезки длиной 5 и 12. Вычислите катеты треугольника.

б) В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2:3. Найдите длину гипотенузы.

в) Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков гипотенузы, на которые ее делит точка касания вписанной в треугольник окружности.

4.10. а) Докажите, что сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

б) Докажите, что радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности выражается формулой: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, где $a, b -$ длины катетов, а $c -$ гипотенузы данного треугольника.

4.11. а) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если даны радиусы R и r описанного и вписанного в него кругов.

б) Определите острые углы прямоугольного треугольника, если отношение радиусов описанной и вписанной окружности равно $\sqrt{3}+1$.

4.12. Найдите площадь прямоугольного треугольника, периметр которого составляет:

а) $2(4+2\sqrt{2})$, а синус одного из углов равен 1/3.

б) $2(3+\sqrt{5})$, а тангенс одного из углов равен 2.

4.13. Произвольная точка гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 24 и 7 соединена с вершиной прямого угла, из которой проведены две медианы образовавшихся треугольников. Определите площадь треугольника, заключенного между медианами.

Уровень II

4.14. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота $CD = h$. Докажите, что $r + r_1 + r_2 = h$, где r, r_1, r_2 – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACD и CBD соответственно.

4.15. Докажите, что треугольник является прямоугольным, если:

а) медиана, проведенная к какой-либо стороне, равна половине этой стороны;

б) для его медиан выполняется равенство $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$.

4.16. С помощью циркуля и линейки постройте прямоугольный треугольник:

а) по сумме катетов и гипотенузе;

б) по сумме катетов и углу, лежащему против одного из катетов;

в) по катету и сумме второго катета и гипотенузы;

г) по гипотенузе и медиане одного из катетов.

4.17. Медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, относятся как $m : n$. Найдите углы треугольника.

4.18. а) Высоты треугольника равны 12, 15 и 20 *см*. Докажите, что треугольник – прямоугольный.

б) Числа h_1, h_2, h_3 выражают длины высот треугольника. Докажите, что если $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 = 1$, то треугольник прямоугольный.

4.19. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно k. Чему равно отношение проекций катетов на гипотенузу?

4.20. а) Докажите, что биссектриса прямого угла в треугольнике делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из вершины прямого угла.

б) Докажите, что если в некотором треугольнике биссектриса делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из этой же вершины, то треугольник прямоугольный.

в) В треугольнике высота и медиана, проведенные из одной вершины делят угол при этой вершины на три равные части. Докажите, что углы треугольника равны $30°, 60°, 90°$.

г) Найдите углы треугольника, если известно, что высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол на четыре равные части.

4.21. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $BO:OE=\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Найдите тангенсы острых углов треугольника.

4.22. Отрезок, соединяющий одну из вершин треугольника с точкой, взятой на противолежащей этой вершине стороне, делит данный треугольник на два подобных треугольника с коэффициентом подобия $\sqrt{3}$. Найдите углы данного треугольника.

4.23. а) В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат так, что две его вершины лежат на катетах, а две другие на гипотенузе. Найдите сторону квадрата.

б) В прямоугольном треугольнике ABC расположен прямоугольник $EKMP$ так, что сторона EK лежит на гипотенузе BC, а вершины M и P – на катетах AC и AB соответственно. Длина катета AC равна 3 *см*, а катета AB – 4 *см*. Найдите длины сторон прямоугольника $EKMP$, если его площадь равна $5/3\,см^2$, а периметр меньше 9 *см*.

4.24. а) Найдите площадь прямоугольного треугольника, периметр которого равен 12, а стороны образуют арифметическую прогрессию.

б) Найдите периметр прямоугольного треугольника, площадь которого равна 24, а стороны образуют арифметическую прогрессию.

4.25. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса $CL=a$ и медиана $CM=b$. Найдите площадь треугольника ABC.

4.26. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе. Найдите ее радиус, если катеты равны 3 *см* и 4 *см.*

4.27. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 *см*. Опущенная на нее высота равна 12 *см* и служит диаметром окружности, делящей каждый из катетов на две части. Найдите эти части.

§ 5. Площадь треугольника

Уровень I

5.1. Может ли уменьшиться площадь треугольника при увеличении всех его сторон?

5.2. Существует ли треугольник, у которого:

а) все высоты меньше 1 *см*, а площадь больше 100 *см*^{2};

б) две высоты больше 100 *см*, а площадь меньше 1 *см*^{2}.

5.3. В треугольнике, площадь которого равна 96 *см*^{2}, длина стороны на 4 *см* меньше длины высоты, опущенной на эту сторону. Найдите длину этой высоты.

5.4. а) Докажите, что стороны треугольника обратно пропорциональны опущенным на них высотам.

б) Внутри равностороннего треугольника взята точка. Расстояния от этой точки до сторон треугольника равны a, b, c. Найдите высоту треугольника.

5.5. Площадь треугольника равна S. Найдите площадь другого треугольника, вершины которого совпадают с серединами сторон исходного треугольника.

5.6. а) Площадь треугольника равна $0{,}4ab$, где a и b – стороны. Найдите третью сторону треугольника.

б) В равнобедренном треугольнике один из углов равен $120°$, а его площадь равна $4\sqrt{3}$. Найдите длину боковой стороны треугольника.

5.7. а) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CF углов BAC и ACB. Найдите отношение площадей треугольников ABC и AFD, если $AB = 21, AC = 28, CB = 20.$

б) Дан треугольник ABC площадью 1. На его медианах AK, BL и CM взяты соответственно точки P, Q, R так, что $AP = PK,$ $BQ = \frac{1}{2}QL,\ CR = \frac{5}{4}RM$. Найдите площадь треугольника PQR.

5.8. Найдите площадь треугольника, зная его сторону c и прилежащие к ней углы α, β.

5.9. а) Площадь треугольника равна S. Найдите площадь треугольника, составленного из его медиан.

б) Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 12, 15 и 21 *см*.

5.10. а) В каком отношении делит площадь треугольника прямая, проходящая через середины двух его медиан?

б) Высоту треугольника разбили на три равные части и через точки деления провели прямые, параллельные основанию треугольника. Эти прямые разбили треугольник на 3 части. Известно, что площадь средней из частей равна 15. Найдите площадь треугольника.

5.11. а) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки соответственно M и N так что $AM : MB = 2 : 3$, $BN : NC = 1 : 6$. Найдите площадь треугольника MBN, если площадь треугольника ABC равна 42.

б) На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC соответственно взяты точки M, N, P так, что $AM = \frac{1}{3}AB$, $BN = \frac{1}{4}BC$, $CP = \frac{1}{5}CA$. Найдите площадь треугольника MNP, если площадь $\triangle ABC$ равна S.

5.12. а) В треугольнике ABC проведены высоты AM и BN. Найдите площадь треугольника CMN, если площадь $\triangle ABC$ равна S и $\angle C = \varphi$.

б) На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках K и L. Найдите площадь треугольника AKL, если площадь треугольника ABC равна S, а $\angle CAB = \alpha$.

5.13. В треугольнике ABC $BC = 7$, $AB = 6$, $AC = 5$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Найдите площадь треугольника ADC.

Уровень II

5.14. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три параллельные прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разделяют треугольник на шесть частей, из которых три – треугольники с площадями 34969 *см*^{2}, 70756 *см*^{2} и 88209 *см*^{2}. Вычислите площадь данного треугольника.

5.15. Найдите площадь треугольника, если известно, что $m_b = 6$ *см*, $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$.

5.16. Две высоты треугольника равны: $h_1 = 2, h_2 = 3$. В каких пределах лежит третья высота? Решите эту задачу для произвольных значений h_1 и h_2.

5.17. Площадь треугольника ABC равна S, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Определите высоты треугольника.

5.18. Стороны AB, BC и CA треугольника ABC разделены точками M, N и P в одном и том же отношении так, что $AM : MB = BN : NC = CP : PA$. Найдите это отношение, если известно, что площадь $\triangle MNP$ составляет 0,28 площади $\triangle ABC$.

5.19. Дан треугольник ABC, в котором угол B равен $30°$, $AB = 4$ *см*, $BC = 6$ *см*. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определите площадь треугольника ABD.

5.20. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K так, что $AK = 1$, $KC = 3$, а на стороне AB взята точка L так, что $AL : LB = 2 : 3$. Пусть Q – точка пересечения прямых BK и CL. Площадь треугольника AQC равна 1. Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B.

5.21. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведены биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь четырехугольника $ADOE$, если $BC = a$ и $AC = b$.

5.22. Дан треугольник ABC. На стороне BC взята точка P, а на стороне AC взята точка M так, что $\angle APB = \angle BMA = 45°$. Отрезки AP и BM пересекаются в точке O. Известно, что площади треугольников BOP и AOM равны, $BC = 1$ *см*, $BO = 1/\sqrt{2}$ *см*. Найдите площадь треугольника ABC.

5.23. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найдите площадь треугольника ABC, зная, что $\angle ABC = \beta$ и $\angle CAB = \alpha$.

5.24. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 6$ *см*, $BC = 4$ *см*, $AC = 8$ *см*. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Через точки A, D, C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ADE.

5.25. В треугольнике ABC известны сторона $AC = 3$, угол $BAC = 30°$ и радиус описанной окружности $R = 2$. Докажите, что площадь треугольника ABC строго меньше 3.

5.26. а) В треугольнике ABC угол A – прямой, точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных на катеты из центра описанной около треугольника окружности (точка O). Площадь четырехугольника $ADOE$ равна 6. Найдите площадь треугольника ABC.

б) В треугольнике ABC угол A – прямой, точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных на катеты из центра описанной около треугольника окружности (точка O). Найдите площадь четырехугольника $ADOE$, если площадь треугольника ABC равна 12.

5.27. а) В треугольнике ABC стороны AB, BC и AC соответственно равны 8, 12 и 16. Биссектриса AL и медиана BK пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $KOLC$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырехугольника $KNOD$ равна 4. Точка K – середина стороны AD, точка O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, и N – точка пересечения отрезка BK и диагонали AC.

5.28. а) В треугольнике ABC, площадь которого равна 5, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении $\frac{AK}{BK}=\frac{2}{3}$, а на стороне AC – точка L, делящая ее в отношении $\frac{AL}{AC}=\frac{5}{8}$. Точка Q пересечения прямых CK и BL удалена от прямой AB на расстояние 1. Найдите длину стороны AB.

б) В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K так, что $AK=1, KC=3$, а на стороне AB взята точка L так, что $\frac{AL}{AB}=\frac{2}{5}$. Площадь треугольника AQC, где Q – точка пересечения прямых BK и CL, равна 2. Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B.

5.29. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K, а на стороне BC – точка M так, что $CK:KA=5,\ S_{\triangle KMC}:S_{AKMB}=5:6$. Найдите $CM:MB$.

5.30. Найдите площадь треугольника, если известно, что стороны треугольника, построенного на основаниях его высот, равны 8, 15, 17.

§ 6. Окружности

I уровень

Вписанные углы, центральные углы

6.1. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O, причем точка O лежит внутри треугольника. Найдите величину угла BAC, если $\angle AOC = 130°$, а $\angle AOB = 140°$.

6.2. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности. Найдите величину угла OAB, если $\angle OAC = 30°$, а $\angle OCB = 10°$.

6.3. Трапеция вписана в круг. Основания трапеции стягивают дуги в $80°$ и $100°$. Какой величины дуги стягивают боковые стороны трапеции?

6.4. Основание треугольника является диаметром окружности, боковые стороны отсекают от нее дуги в $50°$ и $64°$. Найдите угол при вершине треугольника.

6.5. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Найдите $\angle AOB$, если $\angle A = 63°$, $\angle B = 100°$.

6.6. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами $15°$ и $60°$. Найдите площадь треугольника.

6.7. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна a. Вычислите площадь квадрата, вписанного в ту же окружность.

6.8. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом $60°$.

Хорды окружности; касательные и секущие к окружности

6.9. Хорда окружности, стягивающая дугу в $60°$, равна a. Найдите длину хорды, стягивающей дугу в $90°$.

6.10. Хорда окружности, стягивающая дугу в $30°$, равна a. Найдите длину хорды, стягивающей дугу в $150°$.

6.11. Найдите длину общей хорды двух окружностей, если радиусы окружностей равны 2 и 3, а расстояние между центрами равно 4.

6.12. В окружности перпендикулярно диаметру AB проведена хорда CD. Точка их пересечения делит диаметр на отрезки 18 и 32. Найдите длину хорды CD.

6.13. В круге дана точка на расстоянии 15 от центра. Через эту точку проведена хорда, которая делится ею на две части, равные 7 и 25. Найдите радиус круга.

6.14. Расстояние от точки P до центра окружности радиуса 11 равно 7. Через эту точку проведена хорда длиной 18. Найдите длины отрезков, на которые хорда делится точкой P.

6.15. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17. Найдите радиус окружности, если расстояния между серединами хорд равно 5.

6.16. Хорда окружности равна 10. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой конец – секущая, параллельная касательной. Определите радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12.

6.17. Через точку A, лежащую на расстоянии $2r$ от центра окружности радиуса r, проведена прямая на расстоянии $\dfrac{r}{2}$ от центра окружности, пересекающая окружность в точках B и C. Найдите AB и AC.

6.18. Точка находится внутри круга радиусом 6 и делит проходящую через нее хорду на отрезки длиной 5 и 4. Найдите расстояние от точки до окружности.

Комбинации фигур и окружностей

6.19. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности радиуса R, а две другие – на касательной к этой окружности. Найдите длину стороны квадрата.

6.20. Три окружности имеют радиусы 6, 7, 8 и попарно касаются друг друга. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах окружностей.

6.21. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC, AC в точках M, N и P соответственно. Найдите угол MPN, если $\angle A = 80°$, $\angle C = 70°$.

6.22. Три круга касаются внешним образом. Расстояния между центрами кругов равны 7, 8, 9. Найдите радиусы кругов.

6.23. В полуокружность с радиусом $\sqrt{5}$ вписан квадрат так, что две его вершины лежат на диаметре, а две другие на дуге полуокружности. Найдите длину стороны квадрата.

6.24. В сегмент круга, дуга которого содержит $120°$, вписан квадрат со стороной $\sqrt{19}-2$. Найдите радиус круга.

6.25. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 и 12 *см*. Найдите катеты треугольника.

6.26. Площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна Q^2. Найдите радиус окружности.

6.27. Каждая из трех равных окружностей радиуса r касается двух других. Найдите площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

6.28. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 *см* и высотой 8 *см*, проведена касательная, параллельная основанию. Найдите длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

Площадь круга, длина окружности, части круга

6.29. Найдите площадь кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями, длины которых равны C_1 и C_2 ($C_1 > C_2$).

6.30. Хорда круга, стягивающая дугу в $150°$, делит круг на части, площадь меньшей из которых равна $5\pi-3$. Найдите площадь большей части.

6.31. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в $60°$ и в $120°$. Найдите отношение площадей этих кругов.

6.32. В сектор круга радиуса R с центральным углом α вписан квадрат так, что две вершины квадрата лежат на одном из радиусов сектора, а две другие – на другом радиусе и дуге сектора соответственно. Найдите сторону квадрата.

6.33. Дано круговое кольцо, площадь которого равна Q. Определите длину хорды большего круга, являющуюся касательной к меньшему.

6.34. Найдите сторону квадрата, вписанного в круг, площадь которого равна 64 $см^2$.

6.35. Через концы хорды, делящей длину окружности радиуса r в отношении 1:2, проведены касательные. При каком значении r площадь треугольника, образованного хордой и касательными, равна $12\sqrt{3}$?

6.36. В сектор с центральным углом $60°$ вписан круг. При каком радиусе сектора площадь вписанного круга равна π ?

6.37. В сектор AOB с радиусом R и углом $90°$ вписана окружность, касающаяся отрезков OA, OB и дуги AB. Найдите радиус окружности.

6.38. Сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна a. Вычислите площадь отсекаемого сегмента.

II уровень

Вписанные углы

6.39. В треугольнике ABC $\angle A = 8°$, $\angle C = 10°$. Найдите угол, под которым видна медиана BM из центра описанной окружности?

6.40. Через вершину угла A проведена окружность, пересекающая его стороны в точках M и N. Биссектриса этого угла пересекает окружность в точке P. Найдите радиус этой окружности, если $AM = 1$, $AN = 2$, $AP = 4$.

6.41. Хорда AD некоторой окружности делит пополам угол между хордой AC и диаметром AB. Вычислите длину хорды AD, если $AB = 3$, $AC = 1$.

6.42. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей. Найдите отношение $BC : BD$, если $\frac{AC}{AD} = \frac{3}{2}$.

6.43. Окружность касается сторон угла с вершиной в точке O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найдите расстояние от точки C до прямой AB.

6.44. В окружность вписан четырехугольник с углами 120°, 90°, 60°, 90°. Площадь четырехугольника равна $9\sqrt{3}\,см^2$, а его диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите радиус окружности.

Хорды окружности, касательные и секущие к окружности

6.45. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на расстояние, равное 5.

6.46. Из внешней точки к окружности проведены секущая, длиной 12, и касательная, длина которой составляет 2/3 длины внутреннего отрезка секущей. Найдите длину касательной.

6.47. В окружности радиуса R проведена хорда, равная $R/2$. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой – секущая, параллельная касательной. Найдите расстояние между касательной и секущей.

6.48. В некоторый угол вписана окружность радиуса 5. Длина хорды, соединяющей точки касания равна 8. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найдите стороны образовавшейся трапеции.

6.49. В окружности радиуса R проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды AB и CD. Докажите, что $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

6.50. В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найти диаметр окружности.

6.51. Диаметр CD параллелен хорде AB той же окружности. Найдите длину хорды AB, если $AC = b$ и $BC = a$ ($a > b$).

6.52. В окружности проведены хорды $MA = 6$, $MB = 4$ и $MC = 1$. Хорда MB делит угол AMC пополам. Найдите радиус окружности.

6.53. В окружности проведены хорды AB и AC, причем $AB = 2$ *см*, $AC = 1$ *см*, $\angle CAB = 120°$. Найдите длину той хорды окружности, которая делит угол CAB пополам.

6.54. Расстояние между центрами двух окружностей равно $5r$. Одна из окружностей имеет радиус r, а вторая – $7r$. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении 1:6. Найдите длину этой хорды.

Комбинации фигур и окружностей

6.55. Три окружности радиуса R касаются друг друга. Найдите радиус окружности, касающейся трех данных окружностей.

6.56. Три круга радиусов r, $\frac{3}{2}r$, $\frac{3}{2}r$ расположены на плоскости так, что каждые два из них касаются друг друга внешним образом. Определите радиус круга, в который вписана система трех кругов.

6.57. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других сторон на отрезки, равные 2 и 23. Найдите радиус окружности.

6.58. Стороны треугольника равны 12, 15 и 18. Окружность с центром на большей стороне касается двух других сторон. На отрезки какой длины делит центр окружности сторону треугольника?

6.59. На основании BC трапеции $ABCD$, как на диаметре, построена окружность, которая проходит через середины диагоналей трапеции и касается основания AD. Найдите углы трапеции.

6.60. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длин основания и высоты равна диаметру окружности. Найдите высоту этого треугольника.

6.61. Две окружности равного радиуса касаются в точке C внешним образом. Кроме того, каждая из них касается третьей окружности радиуса 6,5 в точках A и B соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 5$ и касание с третьей стороной:

а) внешнее; б) внутреннее.

6.62. Две окружности радиуса 32 с центрами O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найдите радиус окружности, которая касается изнутри обеих данных окружностей и касается отрезка O_1O_2.

6.63. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом BAC, равным α. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

6.64. В полукруг радиуса R вписан круг радиуса $R/2$, а в оставшуюся часть полукруга вписан круг, касающийся окружности радиуса R, круга радиуса $R/2$ и диаметра полукруга. Найдите радиус последнего круга, если $R = 4$.

Площадь круга, длина окружности, части круга

6.65. Выведите формулу длины дуги окружности и площади криволинейного сектора: $l = R\alpha$, $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$ (здесь α – центральный угол, измеряемый в радианах).

6.66. Круг разделен на два сегмента хордой, равной длине стороны правильного вписанного в круг треугольника. Найдите отношение площадей этих сегментов.

6.67. В сектор круга радиуса R с центральным углом α вписан круг. Найдите его радиус.

6.68. В сектор круга радиуса R с центральным углом α вписан квадрат так, что две вершины квадрата лежат на дуге сектора, а две другие – на радиусах. Найдите сторону квадрата.

6.69. Хорда некоторой окружности равна a, а хорда удвоенной дуги равна b. Найдите радиус окружности.

6.70. Найдите радиус круга, в сегмент которого, соответствующий хорде длиной 6 *см*, вписан квадрат со стороной 2 *см*.

6.71. Окружности с радиусами R и $3R$ касаются друг друга внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная. Найдите площадь криволинейного треугольника, образованного этой касательной и дугами окружностей.

6.72. Определите площадь сегмента, если его периметр равен p, а дуга содержит $120°$.

6.73. Периметр сектора равен 28 *см*, а его площадь равна 49 $см^2$. Определите длину дуги сектора.

§ 7. Трапеция

Уровень I

7.1. Докажите, что биссектрисы углов, прилегающих к боковой стороне трапеции пересекаются под прямым углом и точка их пересечения лежит на средней линии трапеции.

7.2. Докажите, что трапеция является равнобедренной, если:

а) ее диагонали равны между собой;

б) точка пересечения диагоналей находится на одинаковом расстоянии от боковых сторон.

7.3. Докажите, что в любой трапеции следующие четыре точки лежат на одной прямой: середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон.

7.4. а) В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = c$, а расстояние от середины стороны CD до прямой AB равно d. Найдите площадь трапеции.

б) Докажите, что в любой трапеции площадь треугольника, основанием которого служит одна из непараллельных сторон, а вершиной – середина противоположной стороны, равняется половине площади трапеции.

7.5. а) В трапеции диагонали равны 7, высота – $\sqrt{13}$, а меньшее основание – 5. Найдите длины боковых сторон этой трапеции.

б) Одна из диагоналей равнобедренной трапеции разбивает ее на два треугольника, площади которых равны 8 и 20. Найдите длины боковых сторон трапеции, если известно, что длина средней линии равна 7.

7.6. а) Основания трапеции относятся, как 1:3, а средняя линия равна 4. Одна из боковых сторон трапеции составляет с большим основанием угол $60°$ и равна 4. Найдите длину другой боковой стороны.

б) Боковые стороны трапеции образуют с нижним основанием углы $60°$. Высота трапеции равна $2\sqrt{3}$, а средняя линия – 8. Найдите длины оснований трапеции.

7.7. а) В трапеции длины оснований равны 3 и 6 *см*, а длины диагоналей – 7 и 8 *см*. Найдите площадь трапеции.

б) В равнобочной трапеции $ABCD$ основания $AD = 9,\ BC = 7$, а диагональ $AC = 10$. Определите площадь трапеции.

7.8. а) В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 2 *м*, а длина основания BC равна 1 *м*. Длины боковых сторон AB и CD равны 1 *м*. Найдите длину диагонали трапеции.

б) Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Найдите площадь трапеции.

7.9. а) Найдите площадь трапеции, основания которой равны 4 и 18, а боковые стороны 13 и 15.

б) Найдите площадь трапеции, основания которой равны 7 и 13, а боковые стороны равны 5.

7.10. а) Основания трапеции равны 1 и 7 *см.* Найдите длину отрезка прямой, которая параллельна основаниям и делит площадь трапеции пополам.

б) Основания трапеции равны 3 и 7. Длина отрезка, соединяющего боковые стороны и параллельного основаниям, равна 6. В каком отношении этот отрезок делит площадь трапеции?

в) Диагональ трапеции делит ее площадь в отношении 1:2. В каком отношении делит площадь трапеции средняя линия?

7.11. а) Найдите длину отрезка, отсекаемого боковыми сторонами от прямой, параллельной основаниям трапеции и проходящей через точку пересечения диагоналей, если основания трапеции равны 6 и 12 *см*.

б) Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка с концами на боковых сторонах трапеции, параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей.

7.12. а) Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b ($a > b$).

б) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке P, диагональ AC в точке L, диагональ BD в точке R и сторону CD в точке Q. Найдите PQ, если известно, что $PL = LR$.

7.13. В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

7.14 а) Докажите, что если боковые стороны трапеции перпендикулярны, то сумма квадратов ее оснований равна сумме квадратов диагоналей.

б) Основания трапеции равны a и b, продолжения боковых сторон пересекаются под прямым углом. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

7.15. а) Диагонали равнобочной трапеции пересекаются под прямым углом. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 24 и 40.

б) Известно, что диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся в отношении 1:3, а длина боковой стороны равна $2\sqrt{10}$. Найдите длину средней линии трапеции.

7.16. а) В равнобедренной трапеции средняя линия равна m, а диагонали взаимно перпендикулярны. Вычислите площадь трапеции.

б) В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а основания относятся, как $m:n$. Найдите отношение ее диагоналей.

7.17. Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC, а O – точка пересечения ее диагоналей. Докажите утверждения:

а) треугольники BCO и AOD подобны;

б) треугольники OAB и OCD равновелики (их площади равны).

7.18. а) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Найдите площади треугольников ABM, BCM, CMD и AMD, если площадь трапеции $ABCD$ равна S.

б) В трапеции $ABCD$ основания $AD = 6$, $BC = 2$, а O – точка пересечения диагоналей. Найдите площадь треугольника OCD, если площадь треугольника BCO равна 2.

7.19. а) В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, $BC = 2$ и $AD = 3$. Прямая, параллельная стороне CD, делит площадь трапеции пополам. Определите, в каком отношении эта прямая делит сторону BC.

б) В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны $60°$ и $30°$. Точка N лежит на основании BC, причем $BN:NC = 2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN перпендикулярна основаниям трапеции и делит ее площадь пополам. Найдите отношение $AM:MD$.

7.20. В трапеции $ABCD$ длина большего основания AD равна a, $BC \perp CD$, $AB = BC$, $BD \perp AB$. Найдите стороны трапеции.

7.21. Дан равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 18. Отрезки какой длины надо отложить от вершины треугольника на его боковых сторонах, чтобы, соединив их концы, получить трапецию с периметром, равным 40?

Вписанная трапеция

7.22. Трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = b$ и $BC = a$ и углом CAD, равным α, вписана в окружность. Найдите радиус окружности.

7.23. Основания равнобочной трапеции равны 12 и 20, а центр описанной около нее окружности лежит на основании. Найдите диагональ и боковую сторону трапеции.

7.24. В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой нижнее основание в 2 раза больше каждой из остальных сторон. Найдите площадь трапеции.

Описанная трапеция

7.25. а) В равнобочной трапеции, описанной около окружности, основания равны 7 и 13. Найдите боковую сторону.

б) В равнобочную трапецию, длины оснований которой равны a и b, вписана окружность. Найдите длину диагонали трапеции.

7.26. а) Около круга площадью 4π описана равнобочная трапеция, боковая сторона которой равна 7. Найдите площадь трапеции.

б) Около круга площадью 16π описана трапеция, боковые стороны которой равны 9 и 13. Найдите площадь трапеции.

7.27. Около окружности радиуса 1 описана прямоугольная трапеция площадью 9. Вычислить длину большего основания трапеции.

7.28. а) Известно, что в равнобочную трапецию с углом при основании $60°$ можно вписать круг радиуса $\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции.

б) В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса 3. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 4.

7.29. а) Около круга описана трапеция, периметр которой равен 12 *см*. Найдите среднюю линию трапеции.

б) Трапеция описана около окружности. Найдите отношение длины средней линии трапеции к ее периметру.

7.30. Около круга описана трапеция с углами при основании α и β. Найдите отношение площади трапеции к площади круга.

Уровень II

7.31. Основание AD трапеции $ABCD$ является диаметром окружности радиуса 2. Прямая, содержащая среднюю линию трапеции, пересекает окружность в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если $AB = BC = CD = 2$.

7.32. Найдите основания трапеции, если ее боковые стороны равны 25 и 39, а диагонали $\sqrt{1594}$ и $3\sqrt{74}$.

7.33. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме других сторон, то этот четырехугольник параллелограмм или трапеция.

7.34. Докажите, что во всякой трапеции сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин непараллельных сторон и удвоенного произведения длин оснований.

7.35. а) Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5:11. Найдите длины оснований трапеции.

б) Длина средней линии равнобочной трапеции равна 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 7:13. Найдите длину высоты трапеции.

7.36. В равнобедренной трапеции с острым углом α при основании окружность, построенная на боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны. В каком отношении она делит большее основание трапеции?

7.37. Площадь трапеции $ABCD$ равна 6. $E-$ точка пересечения продолжений боковых сторон. Через точку E и точку пересечения диагоналей проведена прямая, пересекающая меньшее основание BC в точке P, а большее основание AD в точке Q. Точка F лежит на отрезке EC, причем $EF : FC = EP : EQ = 1:3$. Найдите площадь треугольника EPF.

7.38. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, угол A равен $45°$, угол D равен $60°$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание AD в точке E. Найдите отношение длины отрезка AE к длине отрезка ED.

7.39. Основания равнобочной трапеции относятся как 3:2. На большем основании, как на диаметре, построена окружность, высекающая на меньшем основании отрезок, равный половине этого основания. Определите отношение, в котором окружность делит боковые стороны трапеции?

7.40. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, $AD = 2BC$. На сторонах AB и AD взяты соответственно точки M и N, такие, что $\frac{BM}{MA} = 2,\ \frac{AN}{ND} = 1$. Зная, что площадь трапеции равна S, определите площадь треугольника MNC.

7.41. Дана равнобочная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{2/3}$. Найдите углы трапеции.

7.42. На боковых сторонах KL и MN равнобочной трапеции $KLMN$ выбраны соответственно точки P и Q так, что отрезок PQ параллелен основаниям трапеции. Известно, что в каждую из трапеций $KPQN$ и $PLMQ$ можно вписать окружность, и радиусы этих окружностей равны R и r соответственно. Найдите основания LM и KN.

7.43. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Около треугольника ECB описана окружность. Касательная к этой окружности в точке E пересекает прямую AD в точке F так, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a,\ AD = b$. Найдите длину отрезка EF.

7.44. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята такая точка M, что $AM : BM = 2:3$. На противоположной стороне CD взята такая точка N, что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $\frac{CN}{DN}$, если $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$.

7.45. В трапеции $ABCD$ длины оснований $AD = 4,\ BC = 1$ и углы A и D при основании равны соответственно $\operatorname{arctg} 2$ и $\operatorname{arctg} 3$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник CBE, где $E -$ точка пересечения диагоналей трапеции.

§ 8. Выпуклые четырехугольники

Уровень I

8.1. Докажите, что выпуклый четырехугольник с разными углами имеет хотя бы один тупой угол.

8.2. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника выражается формулой

$$S_1 = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi ,$$

где $d_1, d_2 -$ диагонали, а $\varphi -$ угол между ними.

8.3. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, равны:

а) 2 и 3, а угол между ними равен $45°$;

б) 2 и 4, а угол между ними равен $30°$.

8.4. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом $60°$ и равны соответственно a и b. Найдите диагонали четырехугольника.

8.5. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, если известно, что площади треугольников AOB, BOC и COD (точка O – точка пересечения диагоналей четырехугольника) равны соответственно 12, 18 и 24 $см^2$.

8.6. Докажите, что:

а) четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного четырехугольника, – параллелограмм;

б) отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

8.7. Докажите, что:

а) площадь выпуклого четырехугольника в два раза больше площади четырехугольника, вершинами, которого являются середины сторон данного четырехугольника;

б) равны площади двух выпуклых четырехугольников с совпадающими серединами сторон.

8.8. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника в два раза меньше площади четырехугольника, образованного прямыми, проходящими через вершины данного четырехугольника параллельно его диагоналям.

8.9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна одному метру. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD.

8.10. а) Найдите стороны описанного четырехугольника, периметр которого равен 48 *см*, а длины трех его сторон в последовательном порядке относятся как $\frac{1}{6}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$.

б) Найдите углы вписанного в окружность четырехугольника, если три его угла в последовательном порядке относятся как 1:2:3.

8.11. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором углы при вершинах A и B – прямые, величина угла при вершине D равна $45°$, длина стороны BC равна 1 *м*, а длина:

а) большей диагонали равна 5 *м*;

б) меньшей диагонали равна 5 *м*.

8.12. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $E -$ точка пересечения диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE, DCE равна 1, а площадь всего четырехугольника не превосходит 4. Найдите BC, если $AD = 3$.

8.13. Постройте четырехугольник

а) по трем его сторонам и углам, прилежащим к четвертой стороне;

б) по двум противоположным сторонам и трем углам;

в) по четырем сторонам, если известно, что его диагональ делит один из углов пополам;

г) по трем его углам и двум сторонам, образующим четвертый угол.

Уровень II

8.14. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC. Найдите угол, образованный продолжением сторон AB и DC.

8.15. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике точки – середины диагоналей и середины отрезков, соединяющих середины противолежащих сторон, – лежат на одной прямой.

8.16. Докажите, что в произвольном четырехугольнике отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходит через точку пересечения средних линий и делится ею пополам.

8.17. Докажите, что если в четырехугольнике суммы квадратов противолежащих сторон равны, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

8.18. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислите длину диагонали AC, если $BD = 2$, $AB = 1$ и $\angle ABD : \angle DBC = 4:3$.

8.19. В окружность с центром в точке O и радиусом, равным 6 *см*, вписан четырехугольник $ABCD$. Его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке K. Точки E и F являются соответственно серединами AC и BD. Длина отрезка OK равна 5 *см*, а площадь четырехугольника $OEKF$ равна 12 $см^2$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

8.20. В окружность вписан четырехугольник, длины сторон которого равны a, b, c и d. Вычислите отношение длин его диагоналей.

8.21. В четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны, можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $AB = CD$, а радиус вписанной окружности равен 1.

8.22. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ находится центр окружности радиуса r, касающейся сторон AB, AD и BC. На диагонали BD находится центр окружности такого же радиуса r, касающейся сторон BC, CD и AD. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.

§ 9. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат

Уровень I

Параллелограмм

9.1. Докажите, что четырехугольник является параллелограммом,
а) если его противоположные стороны равны;
б) если его противоположные углы равны между собой;
в) если его диагонали в точке пересечения делятся пополам;
г) если две его противоположные стороны равны и параллельны.

9.2. а) Биссектриса внутреннего угла параллелограмма делит его диагональ в отношении 1:3. Найдите косинус острого угла параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 3/4.

б) Острый угол параллелограмма равен $60°$. Найдите отношение длин его сторон, если отношение длин его диагоналей равно $\sqrt{3}$.

9.3. Найдите площадь параллелограмма, высоты которого равны h_1 и h_2, а один из углов равен α.

9.4. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина CB, N – середина CD. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

9.5. В параллелограмм вписан круг радиуса R. Найдите длины сторон параллелограмма, если известно, что площадь четырехугольника с вершинами в точках касания равна S.

9.6. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна S. Найдите:
а) площадь $\triangle AMN$, где M, N – середины сторон BC и CD;
б) площадь треугольника, две вершины которого – середины сторон AB и AD, а третья M лежит на стороне CD, причем $DM = 2CM$.

9.7. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, причем $BM = 2MC$. Прямая, проходящая через точку M, пересекает сторону AB в точке N. Найдите отношение $BN : NA$, если известно, что эта прямая делит площадь параллелограмма в отношении 1:3.

9.8. Стороны параллелограмма равны a и b $(a < b)$. Из середины большей стороны параллельная сторона видна под углом α. Найдите площадь параллелограмма.

9.9. Стороны параллелограмма равны m и n, а площадь S. Найдите разность квадратов его диагоналей.

9.10. Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в трех заданных точках, не лежащих на одной прямой?

9.11. С помощью циркуля и линейки постройте параллелограмм:
а) по основанию, высоте и диагонали; б) углу и двум высотам;
в) по высоте и двум диагоналям; г) по двум диагоналям и одному углу;
д) если дано отношение его смежных сторон, угол и одна из диагоналей.

Ромб

9.12. Докажите, что если острый угол ромба равен 30°, то сторона его есть средняя пропорциональная между диагоналями.

9.13. а) Площадь ромба равна S, отношение его диагоналей равно k. Найдите сторону ромба.

б) Найдите меньшую диагональ ромба, сторона которого равна 1, а один из углов составляет 60°.

9.14. а) Одна из диагоналей ромба равна 6 *см*. Найдите длину второй диагонали, если известно, что сторона ромба равна стороне равностороннего треугольника с высотой $5\sqrt{3}$ *см*.

б) Найдите диагональ ромба, сторона которого равна стороне равностороннего треугольника с площадью $25\sqrt{3}$ *см*^{2}, а другая диагональ равна 16 *см*.

9.15. Найдите площадь круга, вписанного в ромб:

а) если площадь ромба равна 32, а один из его углов равен 30°;

б) если сторона ромба равна a, а острый угол равен 60°.

9.16. а) Найдите углы ромба, если известно, что площадь вписанного в него круга вдвое меньше площади ромба.

б) Дан ромб с острым углом α. Какую часть от площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

в) Найдите углы ромба, зная его площадь Q и площадь вписанного в него круга S.

9.17. В ромб вписан круг, а в круг вписан квадрат. Найдите острый угол ромба, если площадь квадрата в 4 раза меньше площади ромба?

9.18. В ромб вписан круг. Каждая сторона ромба точкой касания делится на отрезки, длины которых равны a и b. Найдите площадь круга.

9.19. С помощью циркуля и линейки постройте ромб:

а) по стороне и диагонали; б) двум диагоналям; в) высоте и диагонали; г) по углу и диагонали, проходящей через этот угол;
д) по данным стороне и радиусу вписанного круга; е) по сумме диагоналей и углу между диагональю и стороной.

ж) В данный ромб впишите квадрат, вершины которого лежали бы на сторонах ромба.

Прямоугольник

9.20. Диагональ прямоугольника равна a. Найдите периметр четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон прямоугольника.

9.21. Докажите, что биссектрисы углов прямоугольника, не являющегося квадратом, при пересечении образуют квадрат.

9.22. Площадь и диагонали прямоугольника равны 60 *см*^{2} и 13 *см* соответственно. Найдите его стороны.

9.23. Площадь и периметр прямоугольника соответственно равны $3p^2/16$ и $2p$. Найдите: а) его стороны; б) угол между диагоналями.

9.24. Квадрат и прямоугольник имеют равные диагонали, а их площади относятся, как 5:3. Найдите отношение сторон прямоугольника.

9.25. а) Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, периметр которого равен 14, а отрезки AB, BC, AC образуют арифметическую прогрессию.

б) Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, площадь которого равна 3, а отрезки BC, CD, BD образуют арифметическую прогрессию.

9.26. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит его площадь в отношении 2:3. Найдите отношение сторон прямоугольника.

9.27. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ – ромб. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30°. Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.

9.28. С помощью циркуля и линейки постройте прямоугольник,

а) если дан углом между его диагоналями и радиус круга, в который его можно вписать; б) с данной стороной так, чтобы стороны его проходили через четыре данные точки.

Квадрат

9.29. В ромб, не являющийся квадратом, вписан квадрат. Докажите, что его стороны параллельны диагоналям ромба.

9.30. Найдите диагональ квадрата, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 24 *см* и 10 *см*.

9.31. Сторона AB квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK, проведенной из вершины C к той же окружности, равна 2. Чему равен диаметр окружности?

9.32. В полукруг, площадь которого равна 10π, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на диаметре, а две другие – на окружности. Найдите площадь квадрата.

9.33. С помощью циркуля и линейки постройте квадрат: а) по его стороне или диагонали; б) равновеликий $3/8$ данного квадрата.

Уровень II

Параллелограмм

9.34. На сторонах AB, BC, CD параллелограмма взяты соответственно точки M, N, P так, что $AM = AB/4$, $BN = 2BC/3$, $CP = DC/3$. Известно, что площадь треугольника ANC равна S. Найдите площадь треугольника MNP.

9.35. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 и 15. Разность длин сторон параллелограмма равна 7. Найдите длины сторон параллелограмма и его диагоналей.

9.36. На сторонах AB, BC, CD, AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм. Докажите, что центры параллелограммов $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ совпадают.

9.37. Каждая вершина параллелограмма соединена с серединами противоположных сторон. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь фигуры, ограниченной проведенными линиями?

9.38. В параллелограмме со сторонами 2 и 4 проведена диагональ длиной 3. В каждый из получившихся треугольников вписано по окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.

9.39. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Радиус одной из окружностей равен 1. Известно также, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найдите площадь параллелограмма.

Ромб

9.40. Длины меньшей диагонали, стороны и большей диагонали ромба составляют геометрическую прогрессию. Найдите углы ромба.

9.41. Дан ромб $ABCD$. Окружность радиуса R описана около треугольника ABD и проходит через центр окружности, вписанной в треугольник CBD. Определите площадь ромба.

9.42. В ромбе $ABCD$ угол A равен $60°$. Точка N делит сторону AB в отношении $AN:BN=2$. Определите тангенс угла DNC.

9.43. Сторона ромба $ABCD$ равна 6, $\angle BAD=60°$. На стороне BC взята точка E так, что $CE=2$. Найдите расстояние от точки E до центра ромба.

9.44. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ взяты две точки M и N так, что прямые MC и NC делят ромб на три равновеликие части. Найдите MN, если $BD=d$.

9.45. Дан ромб со стороной a и острым углом α. Найдите радиус окружности, проходящей через две соседние вершины ромба и касающейся противоположной стороны ромба или ее продолжения.

9.46. В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен $120°$. Точки E и F лежат на сторонах BC и AD соответственно, отрезок EF и диагональ ромба AC пересекаются в точке M. Площади четырехугольников $BEFA$ и $ECDF$ относятся как $1:2$. Найдите длину отрезка EM, если $AM:MC=1:3$.

9.47. Два равных ромба $ABCD$ $(AB \parallel CD, AD \parallel BC)$ и $APQR$ $(AP \parallel QR, AR \parallel PQ)$ имеют общую вершину A и лежат в одной, плоскости. Известно, что $\angle BAD=\angle PAR=\alpha<90°$, $\angle QAC=\beta$. Продолжения сторон BC и QR пересекаются в точке K. Ромбы расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AK и в одной полуплоскости относительно прямой AD. Найдите угол KAD.

9.48. На плоскости даны квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O. Известно, что $OB=OD=13$, $OC=5\sqrt{2}$ и площадь квадрата больше 225. Найдите длину стороны квадрата и выясните, где расположена точка O – вне или внутри него.

9.49. Из вершины B тупого угла ромба $ABCD$ проведены высоты BM и BN. В четырехугольник $BMDN$ вписана окружность радиуса 1 *см*. Найдите сторону ромба, если $\angle ABC=2\operatorname{arctg}2$.

9.50. а) Диагонали четырехугольника разбивают его на четыре треугольника равного периметра. Докажите, что этот четырехугольник – ромб.

б) Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Известно, что радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны между собой. Докажите, что этот четырехугольник – ромб.

§ 10. Многоугольники (число сторон $n > 4$)

Уровень I

10.1. а) Будет ли являться правильным равносторонний многоугольник, вписанный в окружность?

б) Будет ли являться правильным равносторонний многоугольник, описанный около окружности?

10.2. Дан правильный многоугольник. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки M внутри многоугольника до его сторон (или их продолжений) не зависит от положения точки M.

10.3. а) Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 2π.

б) Сколько острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

10.4. а) Сумма внутренних углов многоугольника с одним из внешних равна $2070°$. Найдите число сторон этого многоугольника.

б) Найдите сумму внутренних острых углов пятиугольной звезды.

10.5. а) В правильном n-угольнике $A_1A_2\ldots A_n$ угол $A_1A_2A_4$ равен $162°$. Найдите n.

б) В правильном n-угольнике $A_1A_2\ldots A_n$ угол $A_1A_nA_4$ равен $15°$. Найдите n.

10.6. Длина стороны правильного n-угольнике равна a. Найдите его площадь, а также радиус описанной и вписанной окружностей.

10.7. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник, площадь которого равна $3R^2$. Найдите n.

10.8. а) Сколько диагоналей можно провести в выпуклом восьмиугольнике?

б) Пусть $n -$ число сторон выпуклого многоугольника, а $d -$ число его диагоналей. Укажите все значения n, при которых выполняется неравенство $2n > d$.

10.9. В равностороннем (неправильном) пятиугольнике $ABCDE$ угол ABC вдвое больше угла DBE. Найдите величину угла ABC.

10.10. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Найдите отношение площадей четырехугольника $A_1A_2A_3A_7$ и пятиугольника $A_3A_4A_5A_6A_7$.

10.11. С помощью циркуля и линейки постройте:

а) правильный шестиугольник, вписанный в данную окружность;

б) правильный восьмиугольник, вписанный в данную окружность;

в) описанный около данной окружности правильный шестиугольник.

Шестиугольник

10.12. Найдите отношение площади правильного шестиугольника к площади шестиугольника с вершинами в серединах сторон исходного шестиугольника.

10.13. а) В правильном шестиугольнике, площадь которого равна $96\sqrt{3}$, найдите расстояние между серединами смежных сторон.

б) Найдите расстояние от центра правильного шестиугольника до прямой, соединяющей середины двух смежных сторон, если известно, что площадь шестиугольника равна $6\sqrt{3}$.

10.14. Площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна $54\sqrt{3}$. Найдите расстояние от середины стороны AB до прямой, соединяющей середины сторон BC и FE.

10.15. а) Найдите площадь правильного шестиугольника, если площадь вписанного в него круга равна 3π.

б) Найдите площадь круга, описанного около правильного шестиугольника, если площадь шестиугольника равна $24\sqrt{3}$.

10.16. а) Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка M лежит на стороне EF. Найдите отношение $FM : ME$, если известно, что прямая BM делит площадь шестиугольника в отношении 3:5.

б) Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Прямая, параллельная стороне AB, делит площадь шестиугольника в отношении 1:2. Определите, в каком отношении эта прямая делит сторону BC.

10.17. Площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна S. Найдите площадь треугольника MFD, где M - середина стороны BC.

10.18. Общая хорда двух окружностей служит для одной из них стороной вписанного квадрата, а для другой – стороной правильного вписанного шестиугольника. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если радиус меньшей из них равен r.

Уровень II

10.19. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен $120°$, образуют арифметическую прогрессию с разностью $5°$. Определите число сторон многоугольника.

10.20. Внутрь правильного n-угольника со стороной a вписано n равных кругов так, что каждый из них касается двух смежных сторон многоугольника и двух других кругов. Найдите площадь «звездочки», образовавшейся в центре многоугольника.

10.21. Два правильных многоугольника с периметрами равными a и b описаны около окружности, а третий правильный многоугольник вписан в эту окружность. Второй и третий многоугольники имеют каждый вдвое больше сторон, чем первый. Найдите периметр третьего многоугольника.

10.22. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона AE равна $\sqrt{3}$. Отрезок BE является биссектрисой угла CEA, а отрезок AD есть биссектриса угла CAE. Известно также, что $BC = 1, AD = 2$ и вокруг четырехугольника $ABCE$ можно описать окружность радиуса 1. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

10.23. С помощью циркуля и линейки постройте:

а) пятиугольник по заданным серединам его сторон;

б) правильный, описанный около данной окружности пятиугольник;

б) правильный, описанный около данной окружности десятиугольник.

§ 11. Геометрические места точек на плоскости

Уровень I

11.1. Докажите, что геометрическое место точек (ГМТ) A, разность квадратов расстояний от которых до двух определенных точек B и C постоянна, есть перпендикуляр к прямой BC.

11.2. Найдите ГМТ плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом.

11.3. Найдите ГМТ, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на разных сторонах данного угла, меньшего развернутого.

11.4. Найдите ГМТ, являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из данной точки A на прямые, проходящие через другую данную точку B.

11.5. Найдите ГМТ, являющихся серединами хорд данной окружности, проходящих через данную точку A внутри окружности.

11.6. На плоскости даны прямая и не лежащая на ней точка. Найдите ГМТ, равноудаленных от данной прямой и данной точки.

11.7. Найдите ГМТ, являющихся серединами отрезков с концами на двух данных несовпадающих прямых.

11.8. Найдите ГМТ, сумма расстояний от которых до двух пересекающихся прямых есть величина постоянная.

11.9. Найдите ГМТ, отношение расстояний от которых до двух данных прямых равно данному числу.

11.10. Найдите ГМТ, являющихся серединами отрезков, соединяющих данную точку вне данной окружности с точками этой окружности.

11.11. Точки A, B и C лежат на одной прямой, причем B находится между A и C. Найдите ГМТ M таких, что радиусы описанных окружностей около треугольников AMB и CMB равны.

11.12. Даны точки A и B. Найдите ГМТ X таких, что $AX : XB = 2$?

11.13. Даны точки A и B и число $k \neq 1$, что из себя представляет ГМТ X таких, что $AX : XB = k$?

11.14. Прямоугольный треугольник перемещается в плоскости так, что вершины его острых углов скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найдите ГМТ положения вершины прямого угла этого треугольника.

Уровень II

11.15. Найдите геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух противоположных сторон квадрата равно произведению расстояний до двух других противоположных сторон.

11.16. Дан квадрат $ABCD$. Найдите ГМТ, являющихся серединами сторон квадратов, вписанных в данный квадрат.

11.17. Три прямые попарно пересекаются, но не проходят через общую точку. Найдите ГМТ, являющихся центрами окружностей, описанных около всевозможных треугольников с вершинами на данных прямых.

11.18. Дано множество трапеций $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, у которых фиксированы вершины A, D и длины сторон AB и BC. Найдите ГМТ, являющихся пересечением диагоналей таких трапеций.

11.19. На окружности фиксированы точки A и B. Найдите ГМТ, являющихся пересечением высот треугольников ABC, если точка C – любая точка окружности, не совпадающая с A и B.

11.20. На окружности фиксированы точки A и B. Найдите ГМТ, являющихся пересечением биссектрис треугольников ABC, если точка C – любая точка окружности, не совпадающая с A и B.

11.21. На окружности фиксированы точки A и B. Найдите ГМТ, являющихся пересечением медиан треугольников ABC, если точка C – любая точка окружности, не совпадающая с A и B.

11.22. Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ M таких, что сумма площадей треугольников AMB и AMC равна S.

§ 12. Задачи на построение циркулем и линейкой

а) метод геометрических мест

12.1. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, отсекаемый сторонами угла, делится этой точкой пополам.

12.2. Проведите касательную к окружности из какой-либо точки, лежащей вне круга.

12.3. Постройте общие касательные к двум окружностям.

12.4. Разделите отрезок на три равные части; на n равных частей.

12.5. а) Через две данные точки A и B проведите окружность заданным радиусом R.

б) Проведите окружность через три данные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой.

в) Дана окружность и отрезок AB. Постройте хорду окружности, равную и параллельную отрезку AB.

12.6. Постройте окружность с центром на данной прямой, проходящую через две данные точки.

12.7. Даны две точки и окружность. Проведите через данные точки две различные параллельные прямые так, чтобы они отсекали на окружности равные хорды.

12.8. Постройте квадрат, стороны которого проходят через четыре данные точки. Всегда ли задача имеет решение?

б) метод подобия

12.9. Через данную точку внутри угла проведите окружность, касающуюся сторон угла.

12.10. Постройте треугольник по отношению его сторон $a:b$, высоте h_c и углу C.

12.11. На сторонах AB и BC данного треугольника ABC найдите точки X и Y такие, что $AX = XY = YB$.

12.12. Постройте треугольник по двум углам и сумме противолежащих сторон.

12.13. Дана окружность, в которой проведены два радиуса. Постройте хорду, делящуюся этими радиусами на 3 равные части.

в) метод геометрических преобразований

12.14. Даны две окружности и отрезок AB. Найдите на этих окружностях точки X и Y такие, что отрезок XY был равен и параллелен отрезку AB.

12.15. Даны три параллельные прямые. Постройте квадрат, три вершины которого лежат на этих прямых.

12.16. Даны две концентрические окружности и точка между ними. Проведите через эту точку окружность, касающуюся данных окружностей.

12.17. Дана прямая XY и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой точку M такую, чтобы угол AMX был равен углу BMY.

12.18. Даны три концентрические окружности. Постройте равносторонний треугольник с вершинами на этих окружностях.

г) алгебраический метод

12.19. Зная отрезки a, b, c, d, постройте отрезок длины:

$$\sqrt{ab};\quad \sqrt{a^2-ab+b^2};\quad \sqrt{a^2-b^2};$$

$$\sqrt{a^2-4ab+7b^2};\quad \sqrt{\frac{a^3}{b}+2cd};\quad \frac{a^3}{ab+cd}.$$

12.20. Дан отрезок длины a и угол, равный α. Постройте отрезки длина, которых равна:

$$a\cos\alpha,\ a\sin\alpha,\ \frac{a}{\cos\alpha},\ \frac{a}{\sin\alpha},\ a\cdot\mathrm{tg}\alpha,\ a\cdot\mathrm{ctg}\alpha,\ a\sqrt{\sin\alpha},\ \frac{a}{\sqrt{\cos\alpha}}.$$

12.21. Через данную точку вне окружности проведите секущую, делящуюся окружностью пополам.

12.22. Постройте квадрат, площадь которого равна площади заданного треугольника.

12.23. Даны прямые a, b и точка M. На прямой a найдите точку, равноудаленную от прямой b и точки M.

12.24. Дана окружность, прямая a и точка A на этой прямой. Постройте окружность, касающуюся данной окружности, а также прямой a в точке A.

12.25. Постройте прямую, параллельную основаниям данной трапеции и делящую площадь трапеции пополам.

12.26. Постройте прямоугольный треугольник по данной сумме катетов и высоте, опущенной на гипотенузу.

12.27. Постройте треугольник, две стороны которого равны двум заданным отрезкам, а площадь площади заданного прямоугольника.

12.28. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую, отсекающую от окружностей равные хорды.

д) метод симметрии

12.29. В данный угол впишите треугольник наименьшего периметра так, чтобы одна его вершина находилась в точке, данной внутри угла, а две другие на его сторонах.

12.30. Пусть MN и PQ – перпендикулярные прямые, O – точка их пересечения. Точки A' и A симметричны относительно MN, а точки A'' и A – относительно PQ. Докажите, что точки A' и A'' симметричны относительно точки O. Выполните построение.

12.31. Точки A и B лежат по разные стороны прямой l. Найдите на ней точку C такую, что $|AC-BC|$ была наибольшей.

е) разные задачи

12.32. Зная две стороны угла, из данной точки, постройте направление на его вершину (вершина угла считается недоступной).

12.33. Постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна.

12.34. Постройте равнобедренный треугольник по его основанию c и радиусу вписанной окружности r.

12.35. Постройте треугольник, если даны два его угла A и B и сумма двух его сторон $b+c$.

12.36. Постройте треугольник, если даны разность сторон $a-b$ и два угла B и C.

12.37. Постройте треугольник по основанию c, боковой стороне b и углу при вершине α.

12.38. К стороне заданного острого угла проведите перпендикулярную прямую такую, что ее отрезок, заключенный внутри угла, был равен данному отрезку a.

§ 13. Элементы векторной алгебры

Уровень I-II

13.1. а) В треугольнике ABC $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AC}=\vec{b}$, точка $M-$ середина стороны $\vec{BC}$. Выразите вектор $\vec{AM}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$.

б) Отрезок AB разделен точкой M так, что $AM:MB=1:2$. Выразите вектор $\vec{OB}$ через векторы $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OM}$ (здесь $O-$ произвольная точка плоскости или пространства).

13.2. Докажите, что: а) во всякой трапеции середины оснований и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой;

б) во всякой трапеции середины оснований и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой;

в) если точка A пересечения диагоналей четырехугольника $MNPQ$ и середины B и C его противоположных сторон MN и PQ лежат на одной прямой, то $MNPQ$ – трапеция или параллелограмм.

13.3. В $\triangle ABC$ $AB=3$ и $AC=5$. Отрезок $AP-$ биссектриса угла A. Выразите вектор $\vec{AP}$ через векторы $\vec{a}=\vec{AB}$ и $\vec{b}=\vec{AC}$.

13.4. В треугольнике ABC точка $M-$ точка пересечения медиан.

а) Выразите вектор $\vec{MC}$ через векторы $\vec{a}=\vec{MA}$ и $\vec{b}=\vec{MB}$.

б) Докажите, что $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{0}$.

в) Докажите, что для произвольной точки пространства выполняется равенство $\vec{OM}=(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})/3$.

13.5. В треугольнике AOB $\angle AOB=90°$, $OA=1$, $OB=3$, $OH-$ высота. Выразите вектор $\vec{OH}$ через векторы $\vec{a}=\vec{OA}$ и $\vec{b}=\vec{OB}$.

13.6. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\vec{a}=\vec{AB}$ и $\vec{b}=\vec{AF}$ Выразите вектор $\vec{FD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

13.7. Радиус OP некоторой окружности делит пополам угол между радиусами OA и OB. Известно, что $\angle AOB = \alpha$. Выразите вектор $\overrightarrow{OP}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

13.8. Точки A, B, C, D, E расположены на окружности так, что дуги AB, BC, CD и DE равны $30°$. Найдите значение λ из равенства $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = \lambda\,(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$.

13.9. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

13.10. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$. Вычислите длину вектора $2\vec{a} - \vec{b}$.

13.11. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удовлетворяют условиям: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$ и $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 2/3$. Вычислите $\cos\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$.

13.12. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ и $\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = 60°$. Вычислите $|\vec{a}|$.

13.13. Найдите косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |0{,}5\vec{a} + \vec{b}|$.

13.14. а) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна S. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $3\vec{a} - \vec{b}$.

б) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + 3\vec{b}$, равна S. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$.

13.15. На сторонах OA и OB треугольника OAB взяты соответственно точки M и N так, что $OM = 2OA/3,\ ON = 4OB/5$. Пусть P – точка пересечения отрезков AN и BM. Выразите вектор $\vec{OP}$ через векторы $\vec{a} = \vec{OA}$ и $\vec{b} = \vec{OB}$.

13.16. Дана окружность с центром O и точка M вне ее. Из точки M проведены к окружности касательные MA и MB (A и B – точки касания). Найдите вектор $\vec{MO}$, если $\angle AMB = \alpha$, $\vec{MA} = \vec{a}$, $\vec{MB} = \vec{b}$.

13.17. а) Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна c. Найдите сумму $\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \vec{BC}\cdot\vec{BA} + \vec{CA}\cdot\vec{CB}$.

б) В треугольнике ABC проведена высота BH. Выразите вектор $\vec{BH}$ через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AC}$.

13.18. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(3;-4)$, $B(0;2)$, $C(6;5)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника.

13.19. Вектор $\vec{u}$ составляет с осями Ox и Oy углы величиной $60°$. Какой угол вектор $\vec{u}$ составляет с осью Oz?

13.20. Определите числа λ такие, что векторы:

а) $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ перпендикулярны, если $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 5$;

б) $\vec{a} = \{2; \lambda - 1\}$ и $\vec{b} = \{\lambda; 1\}$ коллинеарны?

13.21. В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону в отношении $BD : CD = 2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

13.22. а) В треугольнике ABC $AC = BC = 5,\ AB = 6.$ O – центр вписанной окружности, $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$. Выразите вектор $\vec{CO}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

б) В треугольнике ABC $AB = BC = 5,\ AC = 8.$ Точка O – центр описанной окружности, $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$. Выразите вектор $\vec{AO}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

§ 14. Метод координат

Уровень I

14.1. Определите координаты концов A и B отрезка, который точками $M(2;\ 2)$ и $N(1;\ 5)$ разделен на три равные части.

14.2. а) Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ и $C(x_3;\ y_3)$. Определите координаты точки пересечения его медиан.

б) Даны вершины $A(3;1)$ и $B(2;\ 5)$ квадрата $ABCD$. Найдите вершины C и D.

14.3. а) Выведите уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;3)$ и $B(4;\ -1)$.

б) Даны вершины треугольника $ABC: A(3;\ 5)$, $B(-1;\ 4)$ и $C(-3;\ 7)$. Выведите уравнение средней линии, параллельной AB.

14.4. а) Дано уравнение одной из сторон квадрата $4x+3y-2=0$ и координаты его центра $E(3;\ 5)$. Выведите уравнения других сторон.

б) Даны координаты центра параллелограмма $(5;1)$ и уравнения двух его сторон: $3x-2y+4=0$ и $4x+3y-2=0$. Выведите уравнения диагоналей.

14.5. Дана прямая l: $2x-5y+4=0$ и точка $P(4;-1)$. Выведите уравнение прямой, проходящей через точку P:

а) параллельно прямой l;

б) перпендикулярно прямой l.

14.6. Даны вершины треугольника ABC: $A(1;4)$, $B(3;-9)$ и $C(-5;\ 2)$. Определите длину медианы, проведенной из вершины B.

14.7. а) В равнобедренном треугольнике ABC $AB=BC=15$ точка E делит сторону BC в отношении 1:4, считая от вершины B. Определите величину угла между прямыми AE и AC, если $AC=20$.

б) В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой, со сторонами $AB=3$, $BC=4$. Определите величину угла между медианами AM и BD.

в) Даны вершины треугольника OAB: $O(0;0)$, $A(2a;0)$ и $B(a;-a)$. Определите величину угла, образованного стороной OB и медианой OM этого треугольника.

14.8. Даны вершины треугольника ABC:

а) $A(3;\ -1)$, $B(2;\ 5)$ и $C(-2;\ 4)$. Выведите уравнения высоты и медианы, выходящих из вершины A;

б) $A(-7;\ 8)$, $B(0;\ 9)$ и $C(3;\ -2)$. Выведите уравнение биссектрисы угла A.

14.9. а) Найдите расстояние от точки $(3;2)$ до прямой $4x-3y+7=0$.

б) Выведите уравнения прямых, отстоящих от прямой $2x-3y-5=0$ на расстоянии, равном $2\sqrt{13}$.

14.10. Найдите расстояние между параллельными прямыми;

а) $2x-3y+5=0$ и $2x-3y-8=0$;

б) $2x-3y+1=0$ и $4x-6y+7=0$.

14.11. Выведите уравнение окружности с диаметром AB:

а) где $A(-1;3)$ и $B(3;5)$;

б) где $A(1;4)$ и $B(3;8)$.

14.12. Выведите уравнение окружности с центром:

а) $(3;-2)$, касающейся прямой l: $4x+5y-5=0$;

б) $(1;2)$, касающейся прямой l: $3x+4y+5=0$.

в) Выведите уравнения окружностей радиуса r, касающихся осей координат.

14.13. Выведите уравнение касательных к окружности $(x-5)^2+(y-1)^2=17$, проходящих через точку $(-3;3)$.

14.14. Выведите уравнение окружности с центром $(16;-3)$, касающейся окружности $(x-4)^2+(y-1)^2=10$.

14.15. Выведите уравнения:

а) касающихся друг друга окружностей равных радиусов с центрами в точках $(3;4)$ и $(-5;8)$.

б) окружностей равных радиусов с центрами $(3;-2)$, $(5;8)$, касающихся друг друга.

14.16. Выведите уравнение окружности, проходящей через точки $(10;2)$, $(-4;2)$ и $(8;6)$.

14.17. Выведите уравнение окружности, касающейся прямых $2x+3y-1=0$ и $2x+3y+11=0$, если известно, что ее центр лежит на оси абсцисс.

Уровень II

14.18. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $A(-3;3)$, $B(9;3)$ и $C(9;1)$.

14.19. Известны координаты одной из вершин треугольника $(3;-2)$ и уравнения двух его медиан $2x-5y-2=0$ и $x+y+1=0$. Выведите уравнения сторон треугольника.

14.20. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

14.21. В круге с центром в точке O проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. На радиусе OB взята точка K так, что $OK=\frac{1}{3}OB$, а на радиусе $OD-$ точка M так, что $OM=\frac{1}{2}OD$. Докажите, что точка пересечения прямых CK и AM расположена на данной окружности.

14.22. На координатной плоскости Oxy проведена окружность радиуса 4 с центром в начале системы координат. Прямая, заданная уравнением $y=4-(2-\sqrt{3})x$ пересекает ее в точках A и B. Найдите сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.

14.23. а) В квадрат вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности. Найдите эту сумму.

б) Около квадрата описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности. Найдите эту сумму.

14.24. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy:

а) системой неравенств $\begin{cases} x^2+y^2\le 4x-4y-6, \\ x\ge 1; \end{cases}$

б) неравенством $(x^2+y^2-x-y)(x^2+y^2-1)\le 0$;

в) системой неравенств $\begin{cases} x(x+y-\sqrt{2})\le 0, \\ x^2+y^2\le 2. \end{cases}$

14.25. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и являются диаметрами двух равных касающихся окружностей радиуса r. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $BC : AD = k$.

14.26. Расстояние между центрами двух окружностей равно a. Найдите сторону ромба, две противоположные вершины которого лежат на одной окружности, а две оставшиеся – на другой, если радиусы окружностей равны R и r.

14.27. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите CD, если $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{13}$, $AD = \sqrt{17}$.

14.28. В квадрат вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности. Обобщите этот результат на правильные многоугольники.

14.29. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Точка K принадлежит стороне CD и $\dfrac{CK}{KD} = \dfrac{1}{2}$. Найдите расстояние от вершины C до прямой AK.

14.30. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

14.31. Найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника принимает наименьшее значение.

14.32. Может ли быть правильным треугольник, расстояния от вершин которого до двух взаимно перпендикулярных прямых выражаются рациональными числами?

§ 15. Задачи на отыскание геометрических фигур с экстремальными элементами

Уровень I-II

15.1. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна $2\sqrt{2}$ *см*. Найдите длину основания треугольника наибольшей площади. Вычислите эту площадь.

15.2. Найдите наименьшую длину отрезка, который делит равносторонний треугольник со стороной a на две части равной площади.

15.3. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в круговой сектор радиуса R с центральным углом α (одна из сторон прямоугольника параллельна оси симметрии сектора)?

15.4. Площадь треугольника равна 4 *дм*^{2}. Точка M лежит на стороне треугольника, длина которой равна 1 *дм*. На каком расстоянии от этой стороны следует провести прямую, ей параллельную, пересекающую стороны в точках D и E, чтобы площадь треугольника DEM была наибольшей? Найдите эту площадь.

15.5. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом; периметр окна равен 6 м. Определите стороны прямоугольника для окна, пропускающего наибольшее количество света.

15.6. В круг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите эту площадь.

15.7. Вычислите длины сторон прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса $\sqrt{5}$ *дм*.

15.8. В прямоугольную трапецию с высотой 6 *см* и основаниями 4 и 12 *см* вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на боковых сторонах трапеции, а две другие – на ее большем основании. Вычислите стороны прямоугольника наибольшей площади.

15.9. В трапеции меньшее основание и боковые стороны равны и имеют длину 20 *см*. Вычислите углы трапеции, имеющей наибольшую площадь. Найдите эту площадь.

15.10. Площадь равнобедренной трапеции с углом при основании 60° равна 1 *м*^{2}. Найдите высоту трапеции наименьшего периметра. Вычислите этот периметр.

15.11. В равнобедренный треугольник с основанием 20 *см* и высотой 8 *см* вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие – на его боковых сторонах. Найдите высоту прямоугольника наибольшей площади. Вычислите эту площадь.

15.12. В треугольнике заданы сторона a и противолежащий ей угол α. Какую величину должны иметь другие стороны треугольника, чтобы его площадь была наибольшей? Найдите эту площадь.

15.13. В круговой сектор, радиус которого 3 *см*, с прямым центральным углом вписан прямоугольник так, что одна его вершина совпадает с центром круга, а противоположная ей вершина лежит на окружности. Определите длины сторон прямоугольника наибольшей площади. Вычислить эту площадь.

15.14. Из листа в форме равнобедренного треугольника с боковыми сторонами 10 *см* и основанием 12 *см* требуется вырезать параллелограмм наибольшей площади так, чтобы один из его углов совпал с углом треугольника при основании. Вычислите длины сторон этого параллелограмма и его площадь.

15.15. В равносторонний треугольник ABC вписан прямоугольник $PQRS$ наибольшей площади так, что вершины P и Q лежат на сторонах AB и AC соответственно, а вершины R и S – на стороне BC. В каком отношении точка Q делит сторону AC?

15.16. В прямоугольный треугольник ABC вписан прямоугольник $APNQ$ наибольшей площади так, что вершины P и Q лежат соответственно на катетах AC и AB, а вершина N – на гипотенузе BC. В каком отношении точка N делит гипотенузу BC?

15.17. В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD вписан прямоугольник $PQRS$ наибольшей площади так, что вершины P и Q лежат на основании AB, а вершины S и R – на боковых сторонах AD и BC соответственно. Найдите отношение $AS:SD$, если $AB = 4DC$.

15.18. В данный квадрат вписан квадрат наименьшей площади так, что его вершины лежат на сторонах данного квадрата. Найдите отношение площадей квадратов.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

Ответы к § 1

1.2. а) $57°$; **б)** $24°$. **1.5. б)** $135°$ и $45°$. **1.6. а)** $30°$; **б)** $144°$. **1.11. а)** 8, 16, 13 и 3 *см*; **б)** 4,2 *см*. **1.12.** $1+\frac{1}{k}$. **1.13. а)** $\frac{(k+1)l}{l+1}$; **б)** $\frac{(k-1)(l-1)}{k+l-1}$; **в)** $\frac{kl-1}{l-k}$.

Ответы к § 2

2.1. ***Указание.*** **а)** Рассмотрите треугольники AMD, BMN, CDN. **2.2. а)** в общем случае нет; **б)** да; **в)** в общем случае нет. **2.3. а, б, в)** Да. **2.5. б)** ***Указание.*** Воспользуйтесь теоремой о медианах треугольника. **2.6. а)** 2; **б)** 24. **2.7. а)** В общем случае нет; **б)** в общем случае нет. **2.8. а)** нет; **б)** если трапеция равнобокая. **2.9.** $\sqrt{ab}$. **2.10. а, б, в)** k; **г, д, е)** k^2; **ж)** k^3. **2.11. а)** 2; **б)** 7. **2.12. а)** $\frac{ah}{a+h}$; **б)** $\frac{1}{4}$. **2.13. а)** Да. Например, треугольники со сторонами 8, 12, 18 и 12, 18, 27; **б)** ***Указание.*** Докажите, что $\angle ADC$ в $\triangle ACD$ не равен ни одному из углов $\triangle ABD$. **2.15. а)** 100 и 40 *см*; **б)** 14 и 21. **2.17. а)** $\frac{21}{8}, \frac{35}{8}$; **б)** 30. **2.18. а)** 1:2; **б)** 5:6. **2.19.** ***Указание.*** Докажите, что $\angle ALC = 45°$. **2.20. а)** $\frac{84}{13}$ и $\frac{72}{13}$ *см*. **2.21. а)** $\frac{7}{3}$; **б)** 6:5, 7:4, 9:2. **2.22. а)** $\frac{xy-1}{1+y}$, $\frac{xy-1}{1+x}$; **б)** $1:35$, $1:48$. **2.23.** $1:2$.

Ответы к §3

3.1. а) $|a-b| < c < a+b$. **б)** $\frac{1}{2} < m_c < \frac{5}{2}$, $\frac{|a-b|}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}$. **3.3 а)** треугольника не существует; **б)** $45°, 15°, 120°$; **в)** $\arcsin 3/5$, $\arccos 3/5$, $90°$; **г)** да. **3.4. а)** $\sqrt{7}$; **б)** $30°$. **3.5. а)** $m_c = 0,5\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$; **б)** 9,5 *см*. **3.6.** ***Указание.*** Воспользуйтесь результатом задачи 3.5.а. **3.7**. ***Указание.*** Воспользуйтесь результатом задачи 3.5.а. **3.8.** $2\sqrt{5}$. **3.9.** $l_c = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{\varphi}{2}$. **3.10. а)** $0 < l_c < \dfrac{12}{5}$, $0 < l_c < \dfrac{2ab}{a+b}$; **б)** 6 *см*. **3.12. а)** $c\cos\varphi$; **б)** 4,8; **в)** $S\cos^2\alpha$. **3.14. а)** $R = \dfrac{21}{2\sqrt{5}}, r = \sqrt{5}$; **б)** 6. **3.16. а)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$; **б)** $2\sqrt{3}$. **3.17.** $3\sqrt{3}$.

3.20. а) 10, 10 и 12 *см*; **б)** 4 и 12,5. **3.21.** $\dfrac{2a\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)}{1+2\sin(\alpha/2)}$. **3.25**. ***Указание.*** Так как биссектриса $l_a = \dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$ и $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, то $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$. Аналогично для l_b и l_c. **3.27.** $\dfrac{5(5+2\sqrt{10})}{9}$.

3.28. $\dfrac{3\sqrt{3}\,(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$. **3.29.** $\dfrac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sqrt{2\sin^2\alpha+2\sin^2\gamma-\sin^2\beta}}$. **3.30.** $2\sqrt{6}$.

3.31. $\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}$. **3.32.** $\sqrt{3}-1$. ***Указание.*** Множество точек, не принадлежащих общей части треугольников, образует шесть равных прямоугольных треугольников. **3.33.** $\dfrac{a^2(5\sqrt{3}-2\pi)}{32}$. **3.35. а)** $R = \dfrac{a}{2\sin 2\alpha}$, $r = \dfrac{a}{2}\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$; **б)** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}\pm 1}{2\sqrt{3}}$; **в)** $\dfrac{\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}+2}$. **3.36. а)** $\dfrac{1}{6}$.

Ответы к § 4

4.1. а) 50; **б)** 5 *см*. **4.2. а)** 3; **б)** 5; **в)** $4{,}8$. **4.3.** $\sqrt{3}c^2/8$. **4.4. б)** $\dfrac{(p+q)\sqrt{pq}}{2}$. **4.5. а)** $\dfrac{4ab}{a+b}$; **б)** $\sqrt{l_1^2+l_2^2}$. **4.6. а)** $m, m\sqrt{3}, 2m$; **б)** $60°, 30°$. **4.7.** $9\sqrt{5}, 8\sqrt{10}$. **4.8. а)** 42 и 56; **б)** 12. **4.9. а)** 8 и 15; **б)** 15. **4.11. а)** r^2+2Rr; **б)** $30°, 60°$. **4.12. а)** $4\sqrt{2}$; **б)** 4. **4.13.** 42. **4.14.** ***Указание.*** Используйте формулу $r = \dfrac{a+b-c}{2}$. **4.15. а) – в)** ***Указание.*** Воспользуйтесь формулой длины медианы и проверьте выполнение теоремы Пифагора. **4.16. а)** ***Указание.*** Смотрите задачу 3 стр. 57. **б)** ***Указание.*** Постройте прямоугольный треугольник с данным углом и катетом равным данной сумме. Далее впишите в него квадрат, имеющий с ним общий прямой угол. **в)** ***Указание.*** Смотрите задачу 4 стр. 57. **г)** ***Указание.*** Выразите отрезки a и b из формул $4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$ и $c^2 = a^2 + b^2$. **4.17.** $\frac{1}{2}\arccos\frac{5(m^2 - n^2)}{3(m^2 + n^2)}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{5(m^2 - n^2)}{3(m^2 + n^2)}$. **4.18. а)** ***Указание.*** Воспользуйтесь формулами $a = \frac{2S}{12}, b = \frac{2S}{15}, c = \frac{2S}{20}$, где $S -$ площадь треугольника. **в)** ***Указание.*** Используя формулу $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, проверьте равенство $(c + h)^2 = (a + b)^2 + h^2$. **4.19.** k^2. **4.20. г)** $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$. ***Указание.*** Опишите окружность около треугольника и продолжите до пересечения с ней высоту, медиану и биссектрису. Покажите, что медиана и ее продолжение – диаметр. **4.21.** $2 \pm \sqrt{3}$. **4.22.** $90°, 60°, 30°$. **4.23. а)** $\frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 + ab}$; **б)** $\frac{5}{6}$ *см*, 2 *см*. **4.24. а)** 6; **б)** 24. **4.25.** $\frac{a^2 + a\sqrt{a^2 + 8b^2}}{4}$. **4.26.** $\frac{15}{8}$ *см*. **4.27.** Один катет делится на части 5,4 *см* и 9,6 *см*; другой – 12,8 *см* и 7,2 *см*.

Ответы к § 5

5.1. Может. **5.2. а)** Существует; **б)** не существует. **5.3.** 16. **5.4. б)** $a + b + c$. **5.5.** $\frac{S}{4}$. **5.6. а)** $c = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 1{,}2ab}$; **б)** 4. **5.7. а)** 4; **б)** $\frac{1}{12}$. **5.8.** $\frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}$. **5.9. а)** $\frac{3S}{4}$; **б)** $48\sqrt{6}\,см^2$. **5.10. а)** 9:7; **б)** 45. **5.11. а)** 3,6; **б)** $\frac{5S}{12}$. **5.12. а)** $S\cos^2\varphi$; **б)** $S\cos^2\alpha$. **5.13.** $\frac{5\sqrt{6}}{2}$.

5.14. 562500 *см*². **5.15.** $\dfrac{36(3-\sqrt{3})}{8+\sqrt{3}}$ *см*². **5.16.** $1,2 < h_3 < 6$; $\dfrac{h_1h_2}{h_1+h_2} < h_3 < \dfrac{h_1h_2}{h_1-h_2}$; воспользуйтесь результатом задачи 5.4.а. **5.17.** $h_a = \sqrt{\dfrac{2S\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}}$, $h_b = \sqrt{\dfrac{2S\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}}$, $h_c = \sqrt{\dfrac{2S\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}}$.

5.18. $\dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}$. **5.19.** $2,4\,см^2$. **5.20.** $\dfrac{3}{2}$. **5.21.** $\dfrac{S\,b\,(3a+b)}{2\,(a+b)(2a+b)}$. **5.22.** $0,3\,см^2$. **5.23.** $\dfrac{2\,R^2\cdot\sin^3\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **5.24.** $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}см^2$. **5.26. а)** 12; **б)** 6. **5.27. а)** $5\sqrt{15}$; **б)** 24. **5.28. а)** 5; **б)** 6. **5.29.** $6:5$. **5.30.** 340.

Ответы к § 6

6.1. 45°. **6.2.** $50°$ или $70°$. ***Указание.*** Рассмотрите два случая положения центра окружности: внутри и вне треугольника. **6.3.** 90°. **6.4.** 57°. **6.5.** $34°$. **6.6.** $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. **6.7.** $\dfrac{2a^2}{3}$. **6.8.** $h^2\sqrt{3}$. **6.9.** $a\sqrt{2}$. **6.10.** $a(2+\sqrt{3})$. **6.11.** $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$. **6.12.** 48. **6.13.** 20. **6.14.** 6 и 12. **6.15.** $\dfrac{85}{8}$. **6.16.** 6,25. **6.17.** $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{2}\cdot r, \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2}\cdot r$. **6.18.** 2. **6.19.** 1,6R. **6.20.** 84. **6.21.** 75°. **6.22.** 3; 4;5. **6.23.** 2. **6.24.** 5. **6.25.** 8 и 15 *см*. **6.26.** $\dfrac{2Q\sqrt[4]{3}}{3}$. **6.27.** $2r^2(2\sqrt{3}+3)$. **6.28.** 3 *см*. **6.29.** $\dfrac{C_1^2-C_2^2}{4\pi}$. **6.30.** $7\pi+3$. **6.31.** 1:3. **6.32.** $\dfrac{R\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin 2\alpha+\sin^2\alpha}}$. **6.33.** $2\sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}$. **6.34.** $8\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. **6.35.** 4. **6.36.** 3. **6.37.** $R\cdot(\sqrt{2}-1)$. **6.38.** $\dfrac{a^2(4\pi-3\sqrt{3})}{36}$. **6.39.** 2°. **6.40.** $4\sqrt{\dfrac{14}{55}}$. **6.41.** $\sqrt{6}$. **6.42.** 9:4. **6.43.** $\sqrt{ab}$. **6.44.** 3 *см*. **6.45.** 13. **6.46.** 6. **6.47.** $\dfrac{R}{8}$.

6.48. 20, 12.5, 5. **6.50.** $\sqrt{m^2+n^2}$. **6.51.** $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **6.52.** $\sqrt{\dfrac{32}{3}}$.

6.53. 3. **6.54.** $7\sqrt{3}r$ или $\dfrac{7\sqrt{143}}{6}r$. **6.55.** $R\cdot\left(\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$. **6.56.** $3r$.

6.57. 17. **6.58.** 8 и 10. **6.59.** $30°$ и $150°$. **6.60.** $\dfrac{2R}{5}$. **6.61. а)** $\dfrac{75}{8}$; **б)** $\dfrac{25}{6}$. **6.62.** 7. **6.63.** $R\sin 2\alpha\cdot\mathrm{tg}(\alpha/2)$. **6.64.** 1. **6.66.** $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$.

6.67. $\dfrac{R\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)}$. **6.68.** $\dfrac{2R}{\sqrt{5+4\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}$. **6.69.** $\dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$.

6.70. $\sqrt{10}$ *см*. **6.71.** $R^2\left(4\sqrt{3}-\dfrac{11\pi}{6}\right)$. **6.72.** $\dfrac{3(4\pi-3\sqrt{3})p^2}{4(2\pi+3\sqrt{3})^2}$. **6.73.** 14 *см*.

Ответы к § 7

7.4. а) cd. **7.5. а)** $\sqrt{14}$; **б)** 5. **7.6. а)** 4; **б)** 6 и 10. **7.7. а)** $12\sqrt{5}$ *см*^{2}; **б)** 48. **7.8. а)** $\sqrt{3}$ *м*; **б)** $\dfrac{3}{4}ab$. **7.9. а)** 132; **б)** 40. **7.10. а)** 5 *см*; **б)** 27:13; **в)** 7:5. **7.11. а)** 8 *см*; **б)** $\dfrac{2ab}{a+b}$. **7.12. а)** $\dfrac{a-b}{2}$; **б)** $\dfrac{3ab}{2b+a}$. **7.13.** 6.

7.14 б) $\dfrac{|a-b|}{2}$. **7.15. а)** 1024; **б)** $4\sqrt{2}$. **7.16. а)** m^2; **б)** $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$. **7.18. а)** $S_{\vartriangle ABM}=S_{\vartriangle CMD}=\dfrac{abS}{(a+b)^2}$, $S_{\vartriangle BMC}=\dfrac{b^2S}{(a+b)^2}$, $S_{\vartriangle AMD}=\dfrac{a^2S}{(a+b)^2}$; **б)** 6. **7.19. а)** $3:5$; **б)** $3:4$. **7.20.** $AB=BC=\dfrac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$, $CD=a\sqrt{\sqrt{5}-2}$. **7.21.** 6. **7.22.** $\dfrac{\sqrt{(b-a)^2+(a+b)^2\mathrm{tg}^2\alpha}}{4\sin\alpha}$.

7.23. $8\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5}$. **7.24.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. **7.25. а)** 10; **б)** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+6ab+b^2}$. **7.26. а)** 28; **б)** 88. **7.27.** $\frac{3(3+\sqrt{5})}{2}$. **7.28. а)** $8\sqrt{3}$; **б)** 48. **7.29. а)** 3 *см*; **б)** 1:4. **7.30.** $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$. **7.31.** $\sqrt{13}$. **7.32.** 1 и 57. **7.33.** ***Указание.*** Соедините середины противоположных сторон с серединой какой-нибудь из диагоналей. **7.35. а)** 1 и 7; **б)** 4. **7.36.** $\sin 2\alpha : 1$. **7.37.** $3/32$. **7.38.** $\sqrt{3}$. **7.39.** 1:2. **7.40.** $\frac{S}{3}$. **7.41.** $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$. **7.42.** $\frac{2r^2}{\sqrt{Rr}}$, $\frac{2R^2}{\sqrt{Rr}}$. **7.43.** $\sqrt{a(a-b)}$. **7.44.** $\frac{3}{29}$. **7.45.** $\frac{18}{25+2\sqrt{130}+\sqrt{445}}$.

Ответы к § 8

8.3. а) $3\sqrt{2}$; **б)** 4. **8.4.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$, $\sqrt{a^2+b^2+ab}$. **8.5.** 70 $см^2$. **8.9.** 1 *м*. **8.10. а)** 6, 12, 18 и 12 *см*; **б)** $45°, 90°, 135°, 90°$. **8.11. а)** $7{,}5\,м^2$; **б)** $(\sqrt{24}+12)\,м^2$. **8.12.** 3. ***Указание.*** Воспользуйтесь тем, что сумма двух взаимно обратных положительных величин принимает наименьшее значение равное 2. **8.14.** $90°$. ***Указание.*** Докажите, что четырехугольник, вершинами которого являются середины диагоналей и середины сторон AD и BC, – прямоугольник. **8.16.** ***Указание.*** Рассмотрите два четырехугольника, вершинами которых являются середины диагоналей и середины противоположных сторон рассматриваемого четырехугольника. **8.17.** ***Указание.*** Воспользуйтесь теоремой косинусов. **8.18.** $AC=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$. **8.19.** $12\sqrt{15}\,см^2$. **8.20.** $\frac{ad+bc}{ab+cd}$. **8.21** 4. **8.22.** $4(\sqrt{2}+1)r^2$.

Ответы к § 9

9.2. а) 7/15. ***Указание.*** Воспользуйтесь теоремой косинусов; **б)** 1. **9.3.** $\frac{h_1h_2}{\sin\alpha}$. **9.5.** $\frac{4R^3}{S}$. **9.6. а)** $\frac{3}{8}S$; **б)** $\frac{7}{24}S$. **9.7.** $BN:NA=3:1$.

9.8. $\dfrac{4a^2-b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **9.9.** $4\sqrt{m^2n^2-S^2}$. **9.10.** 3. **9.13. а)** $\sqrt{\dfrac{(1+k^2)S}{2k}}$; **б)** 1. **9.14. а)** $2\sqrt{91}$ *см*; **б)** 12 *см*. **9.15. а)** 4π; **б)** $\dfrac{3\pi a^2}{16}$. **9.16. а)** $\arcsin\dfrac{2}{\pi}$; $\pi-\arcsin\dfrac{2}{\pi}$; **б)** $\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha$; **в)** $\arcsin\dfrac{4S}{\pi Q}$; $\pi-\arcsin\dfrac{4S}{\pi Q}$.
9.17. 30°. **9.18.** πab. **9.20.** $2a$. **9.22.** 5 и 12 *см*. **9.23. а)** $\dfrac{p}{4}$ и $\dfrac{3p}{4}$; **б)** $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$. **9.24.** 3. **9.25. а)** 12; **б)** 7. **9.26.** 4:5. **9.27.** 2. **9.30.** $13\sqrt{2}$ *см*.
9.31. $\sqrt{10}$. **9.32.** 16. **9.34.** $\dfrac{17}{12}S$. **9.35.** 10, 17, 21 и $\sqrt{337}$. **9.37.** $\dfrac{1}{6}$.
9.38. $\sqrt{\dfrac{17}{3}}$. **9.39.** $\dfrac{4(2\sqrt{3}+3)}{3}$. **9.40.** $30^\circ, 150^\circ$. **9.41.** $\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2}$. **9.42.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{11}$. **9.43.** $\sqrt{13}$. **9.44.** $\dfrac{d}{3}$. **9.45.** $\dfrac{a(4\sin^2\alpha+1)}{8\sin\alpha}$. **9.46.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. **9.47.** $\pi-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. **9.48.** 17; точка O расположена внутри квадрата. **9.49.** $\dfrac{15}{4}$.

Ответы к § 10

10.1. а) Да; **б)** не обязательно. **10.3. б)** 0, 1, 2, 3. ***Указание.*** Воспользуйтесь результатом предыдущего пункта задачи. **10.4. а)** 13; **б)** 180°.
10.5. а) 30; **б)** 36. **10.6.** $S=\dfrac{1}{4}na^2\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$, $R=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}$, $r=\dfrac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$.
10.7. 12. **10.8. а)** 20; **б)** 4, 5, 6. **10.9.** 60°. ***Указание.*** На ребре DE возьмите точку M так, чтобы $\angle EBM=\angle ABE$, и докажите, что четырехугольник $ACDE$ – ромб. **10.10.** $\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}}{\dfrac{7}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{7}-\cos^2\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}}$. **10.12.** $\dfrac{4}{3}$.
10.13. а) $4\sqrt{3}$; **б)** 1,5. **10.14.** 4,5. **10.15. а)** $6\sqrt{3}$; **б)** 16π. **10.16. а)** 5:3;

б) $(\sqrt{3}+1):1$. **10.17.** $\frac{5S}{12}$. **10.18.** $\frac{r(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$. **10.19.** 9. ***Указание.*** После решения квадратного уравнения выполните проверку.

10.20. $\frac{a^2}{4}\cdot\frac{n\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}-(n-2)\frac{\pi}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^2}$. **10.21.** $b\sqrt{\frac{a}{2a-b}}$. **10.22.** $\frac{5}{4}\sqrt{3}$. **10.23.** **а)** ***Указание.*** Выберите три соседние точки и воспользуйтесь результатами задач 8.6.б и 9.10. **б)** ***Указание.*** Сторона пятиугольника равна $\frac{\sqrt{5}}{2}R$, где $R-$ радиус данной окружности. **10.24.** $\frac{nR^2}{2}$, где $R-$ радиус описанной около n-угольника окружности.

Ответы к § 11

11.2. Дуги двух окружностей величиной $2\pi-2\alpha$, для которых отрезок является хордой. **11.3.** Искомое ГМТ – все точки плоскости, лежащие внутри угла. Точки, лежащие на сторонах угла исключены. ***Указание.*** Покажите, что для любая внутренняя точки угла является серединой некоторого отрезка с концами на сторонах данного угла. **11.4.** Окружность с диаметром AB. **11.5.** Окружность с диаметром AO, где O – центр окружности. **11.6.** Парабола с осью, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой. ***Указание:*** примените метод координат. **11.7.** В случае, если данные прямые параллельны, искомое геометрическое место точек – прямая, параллельная данным и проходящая через середину отрезка с концами на данных прямых и перпендикулярного им. В случае, если данные прямые не параллельны – все точки плоскости, за исключением точек, лежащих на данных прямых. **11.8.** Прямоугольник с вершинами на данных прямых. **11.9.** Две прямые, проходящие через точку пересечения данных прямых, если эти прямые пересекаются; две прямые, параллельные данным прямым, если данные прямые параллельны друг другу и отношение расстояний не равно 1; прямая, расположенная посередине между данными прямыми, если они параллельны и отношение расстояний равно 1. **11.10.** Образ данной окружности при гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{2}$ с центром в данной точке. **11.11.** Серединный перпендикуляр к отрезку AB, исключая точку пересечения с прямой AB. **11.12.** Окружность с диаметром X_1X_2, где X_1 и X_2 – точки прямой AB такие, что $\frac{AX_1}{X_1B}=2$ и $\frac{AX_2}{X_2B}=2$. ***Указание.*** Воспользуйтесь теоремой о биссектрисе угла AXB и смежного с ним. **11.13.** Окружность с центром на прямой AB. ***Замечание.*** Задачу можно решить с использованием метода координат. Пусть $AB=a$. Тогда искомое место точек – окружность радиуса $\frac{ak}{|k^2-1|}$ с центром на прямой AB, расположенным на расстоянии $\frac{ak^2}{|k^2-1|}$ от точки A справа, если $k>1$ и слева, если $k<1$. **11.14.** Отрезок. **11.15.** Прямые, содержащие диагонали квадрата, и окружность, описанная вокруг него. ***Указание.*** Используйте метод координат. **11.16.** Стороны квадрата, вершины которого являются серединами квадрата $ABCD$. **11.17.** Вся плоскость. Если $d_1, d_2, d_3 -$ расстояния от выбранной точки до данных прямых, то окружность радиуса $d_1+d_2+d_3$ с центром в этой точке пересекает каждую из прямых (в двух точках) и является описанной около треугольников, вершинами которых являются полученные точки пересечения. **11.18.** Пусть $\frac{AD}{BC}=k$. Искомое ГМТ – окружность с центром в точке M такой, что $AM=\frac{kBC}{1+k}$, радиуса $\frac{kAB}{1+k}$, из которой выброшены точки пересечения с прямой AD. **11.19.** Окружность, симметричная данной относительно прямой AB, из которой исключены точки A и B. **11.20.** Отрезок AB разбивает окружность на две дуги. Из точек первой он виден под углом C, из точек второй под углом $\pi-C$. Искомое ГМТ – объединение двух дуг окружностей, из которых AB виден под углом $\frac{\pi+C}{2}$ и $\pi-\frac{C}{2}$ (см. задачу 11.2) и лежащих соответственно по ту же сторону от прямой AB что и первая и вторая дуги исходной окружности. Точки A и B исключены. **11.21.** Искомым ГМТ является окружность, полученная из данной окружности гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{3}$ с центром в середине отрезка AB. **11.22.** Граница параллелограмма KLK_1L_1, за исключением вершин, вершины которого лежат на прямых AC и AB так, что $KL \parallel CB$ и расстояние между ними равно $2 \cdot \frac{s - S_{\triangle ABC}}{BC}$.

Ответы к § 12

12.8. Две противоположные вершины искомого квадрата лежат, во-первых, на внешних полуокружностях, построенных на противоположных сторонах четырехугольника, вершинами которого являются данные точки, и, во-вторых, на прямой, проходящей через точки внутренних полуокружностей, равноудаленных от концов соответствующих диаметров. Задача не всегда имеет решение. **12.10.** Возьмите два произвольных отрезка m и n так, чтобы выполнялось соотношение $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$. По отрезкам m, n и углу между ними C постройте треугольник A_1B_1C, подобный искомому. Далее выполните подобное преобразование $\triangle A_1B_1C$ так, чтобы высота искомого $\triangle ABC$ была равна данной высоте h_c. Для этого на высоте CD_1 треугольника A_1B_1C (или на продолжении высоты CD_1) отложите отрезок $CD = h_c$ и через точку D проведите прямую $AB \parallel A_1B_1$. Треугольник ABC – искомый. **12.14.** Сделайте параллельный перенос одной из окружностей на вектор $\overrightarrow{AB}$. **12.17.** Отразите точку относительно прямой XY. **12.18.** Возьмите на одной из окружностей произвольную точку и «поверните» плоскость вокруг нее на $60°$. **12.21.** Сделайте гомотетию с центром в данной точке и коэффициентом $\frac{1}{2}$. **12.28.** Пусть M – данная точка, O_1 и O_2 – центры окружностей, XM и YM равные хорды, лежащие на одной прямой $O_1M = O_1X$, $O_2M = O_2Y$, R_1 и R_2 – радиусы окружностей, $\alpha = \angle O_1MO_2$ – известный угол, $\varphi = \angle O_1MX$ – неизвестный угол. Тогда $R_1 \cos\varphi = R_2 \cos(\pi - \alpha - \varphi)$. Следовательно, угол φ можно построить циркулем и линейкой. *Второе решение*: Постройте окружность, симметричную первой окружности относительно точки *M*.

12.29. Пусть дан угол MON и внутри него точка A. Постройте точку A_1, симметричную точке A относительно прямой OM, и точку A_2, симметричную A относительно прямой ON. Точки B и C пересечения прямой A_1A_2 с прямыми OM и ON будут вершинами искомого треугольника. **12.30.** Линия $A'OA''$ – прямая и $A'O = OA''$. Из равенства прямоугольных треугольников AOK и $A'OK$, AOL и $A''OL$ следует, что $\triangle AOA'$ и $\triangle AOA''$ равнобедренные, а потому $\angle AOK = \angle A'OK$, $\angle AOL = \angle A''OL$; но $\angle AOL + \angle AOK = 90°$; значит, $\angle A''OA + \angle AOA' = 90° + 90° = \; = 180°$, т.е. точки A', O, и A'' лежат на одной прямой, при этом $A''O = OA = OA'$, как стороны равнобедренных треугольников с общей боковой стороной OA. Следовательно, точки A' и A'' симметричны относительно центра O. **12.37.** Постройте сначала геометрическое место точек, из которых данный отрезок $AB = c$ виден под данным углом. Из двух дуг с хордой $AB = c$, вмещающих данный угол α, рассмотрите лишь одну. Вторым геометрическим местом точек будет окружность с центром в точке A и радиусом $R = b$. Оба геометрических места могут иметь две общие точки, одну и ни одной. Соответственно этому задача может иметь два решения, одно или ни одного. **12.38.** Из произвольной точки N, лежащей на стороне AB данного острого угла ABC, восставьте перпендикуляр и на нем от точки N внутрь угла отложите отрезок $NM = a$. Проведите прямую $MK \parallel AB$ до ее пересечения со стороной угла BC в точке K. Из точки K опустите перпендикуляр KL на сторону AB. Прямая KL – искомая, так как $KL \perp AB$ и $KL = NM = a$.

Ответы к § 13

13.1. а) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; **б)** $-2\vec{a} + 3\vec{b}$. **13.3.** $\frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$. **13.4.** $-\vec{a} - \vec{b}$.

13.5. $\frac{9}{10}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b}$. **13.6.** $2\vec{a} + \vec{b}$. **13.7.** $\frac{1}{2\cos(\alpha/2)}(\vec{a} + \vec{b})$.

13.8. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **13.9.** $-11.$. **13.10.** $\sqrt{26}$ **13.11.** $-\frac{4}{\sqrt{21}}$. **13.12.** $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

13.13. $-\frac{1}{4}$. **13.14. а)** $7S$. **б)** $\frac{S}{7}$. **13.15.** $\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$ **13.16.** $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{1+\cos\alpha}$.

13.17. а) c^2; **б)** $-\vec{a}+\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\vec{b}\,\vec{b}}\cdot\vec{b}$. **13.18.** $(3;1)$. **13.19.** $45°$ или $135°$.

13.20. а) $\pm\frac{3}{5}$; **б)** $2;-1$. **13.21.** 3:1, считая от вершины. **13.22. а)** $\frac{5}{16}(\vec{a}+\vec{b})$; **б)** $-\frac{7}{18}\vec{a}+\frac{25}{36}\vec{b}$.

Ответы к § 14

14.1. $A(3;-1), B(0;8)$. **14.2. а)** $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$; $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$; **б)** $C_1=(6;6)$, $D_1=(7;2)$ и $C_2=(-2;4)$, $D_2=(-1;0)$. **14.3. а)** $2x+y-7=0$; **б)** $x-4y+24=0$. **14.4. а)** $3x-4y+36=0$, $3x-4y-14=0$ и $4x+3y-52=0$; **б)** $5x+93y-118=0$ и $131x+9y-664=0$. **14.5. а)** $2x-5y-13=0$; **б)** $5x+2y-18=0$.

14.6. 13. **14.7. а)** $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$; **б)** $\pi-\arccos\frac{1}{5\sqrt{13}}$. **14.8. а)** $-4x+y-11=0$ – высота, $-11x+6y-27=0$ – медиана; **б)** $x+3y-17=0$. **14.9. а)** 2,6; **б)** $2x-3y-31=0$ и $2x-3y+21=0$.

14.10. а) $\sqrt{13}$; **б)** $\frac{5\sqrt{13}}{26}$. **14.11. а)** $(x-1)^2+(y-4)^2=5$;

б) $(x-2)^2+(y-6)^2=5$. **14.12. а)** $(x-3)^2+(y+2)^2=\frac{9}{41}$;

б) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$. **14.13.** $y-3=k(x+4)$, где $k=\frac{1}{4}$ или $-\frac{13}{16}$.

14.14. $(x-16)^2+(y+3)^2=90$ или $(x-16)^2+(y+3)^2=250$.

14.15. а) $(x-3)^2+(y-4)^2=20$, $(x+5)^2+(y-8)^2=20$;

б) $(x-3)^2+(y+2)^2=26$ и $(x-5)^2+(y-8)^2=26$.

14.16. $(x-3)^2+(y-1)^2=50$. **14.17.** $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{36}{13}$. **14.18.** $5\sqrt{2}$. **14.19.** $12x+19y+2=0$, $3x+17y+25=0$ и $9x+2y+19=0$. **14.20.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **14.22.** $\frac{2\pi}{3}+4\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **14.23. а)** $3a^2$, где $a-$ длина стороны квадрата; **б)** $4a^2$, где $a-$ длина стороны квадрата. **14.24. а)** $\frac{3\pi}{2}+1$; **б)** $\frac{\pi}{2}+1$; **в)** $\frac{\pi}{2}+1$. **14.25.** $3r^2\cdot\frac{|1-k^2|}{1+k^2}$. **14.26.** $\sqrt{R^2+r^2-a^2}$. **14.27.** 5. **14.29.** $\frac{1}{\sqrt{13}}$. **14.30.** 1. **14.31.** Точка пересечения медиан треугольника. **14.32.** Нет.

Ответы к § 15

15.1. 4 *см*; 4 *см*^{2}. **15.2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **15.3.** $R^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$. **15.4.** 4 *дм*; 1 *дм*^{2}. **15.5.** $\frac{6}{\pi+4};\frac{12}{\pi+4}$. **15.6.** $2R^2$. **15.7.** 1 *дм*, 4 *дм*. **15.8.** $\frac{9}{2}$ *см*, 6 *см*. **15.9.** $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $300\sqrt{3}$ *см*^{2}. **15.10.** $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ *м*, $4\cdot\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$ *м*. **15.11.** 4 *см*, 40 *см*. **15.12.** $\frac{a}{2\sin(\alpha/2)}$, $\frac{1}{4}a^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **15.13.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ *см*, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ *см*, $\frac{9}{2}$ *см*^{2}. **15.14.** 6 *см*, 5 *см*, 24 *см*^{2}. **15.15.** 1:1. **15.16.** 1:1. **15.17.** $2:1$. **15.18.** $2:1$.

Содержание